

Hafta 3

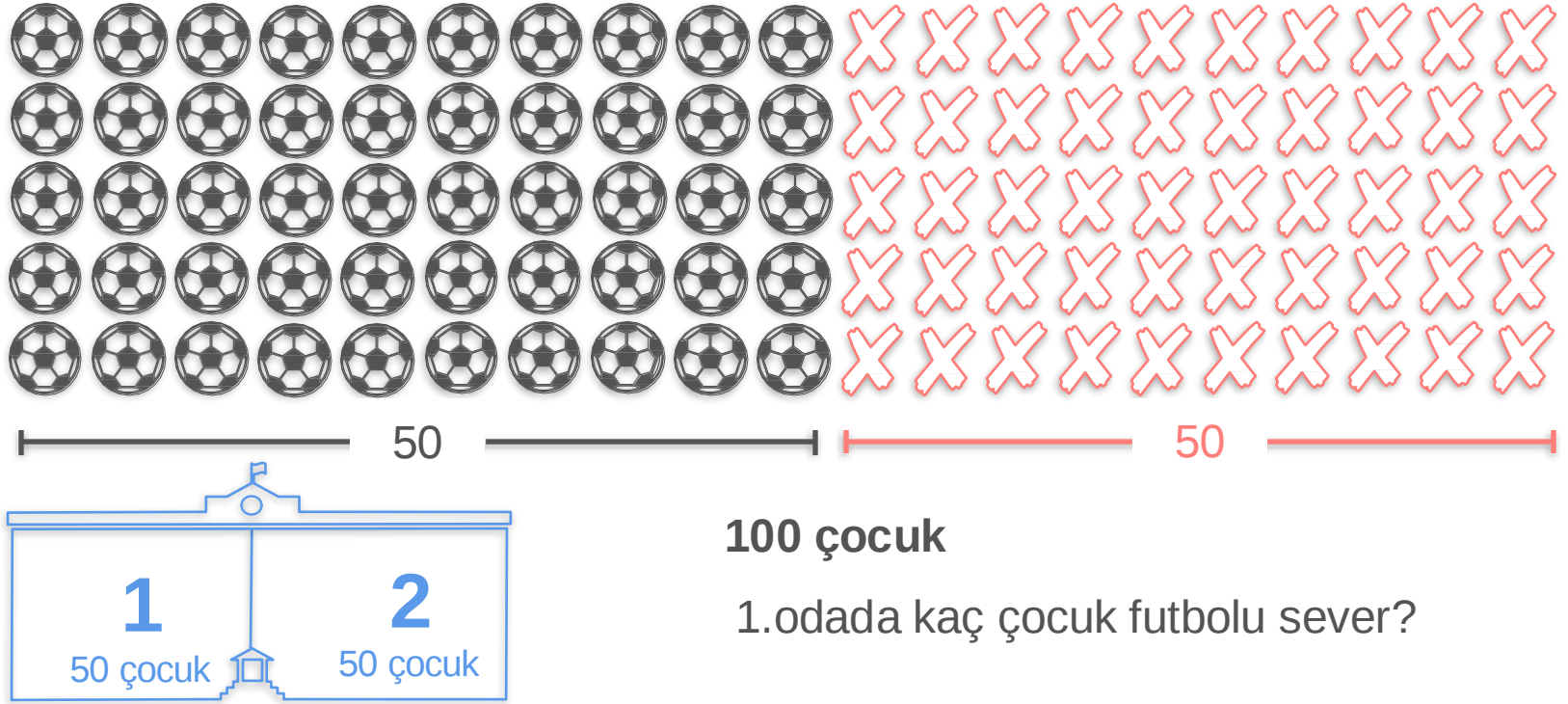
Bağımsızlık & Koşullu Olasılık & Çarpım Kuralı



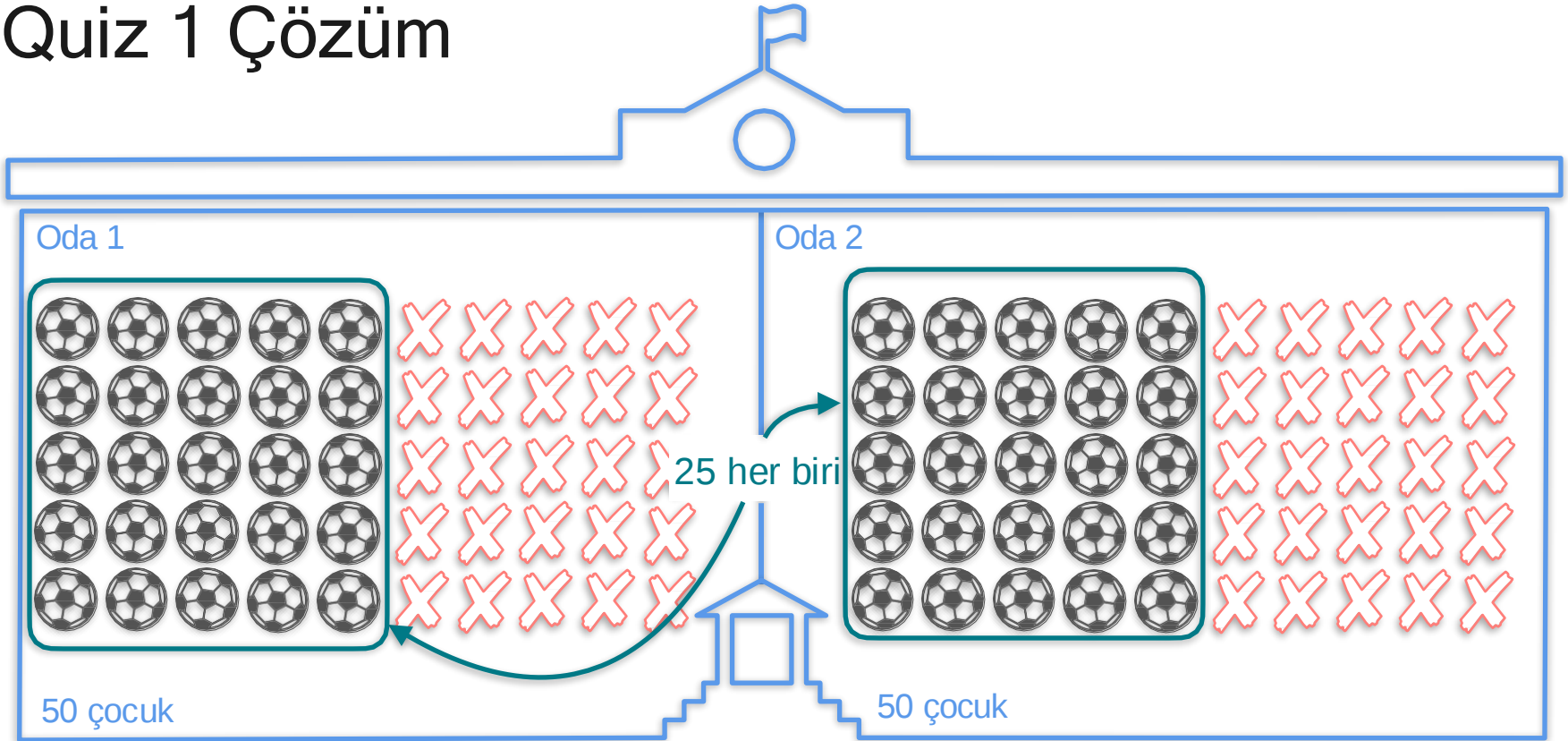
DeepLearning.AI

Bağımsızlık

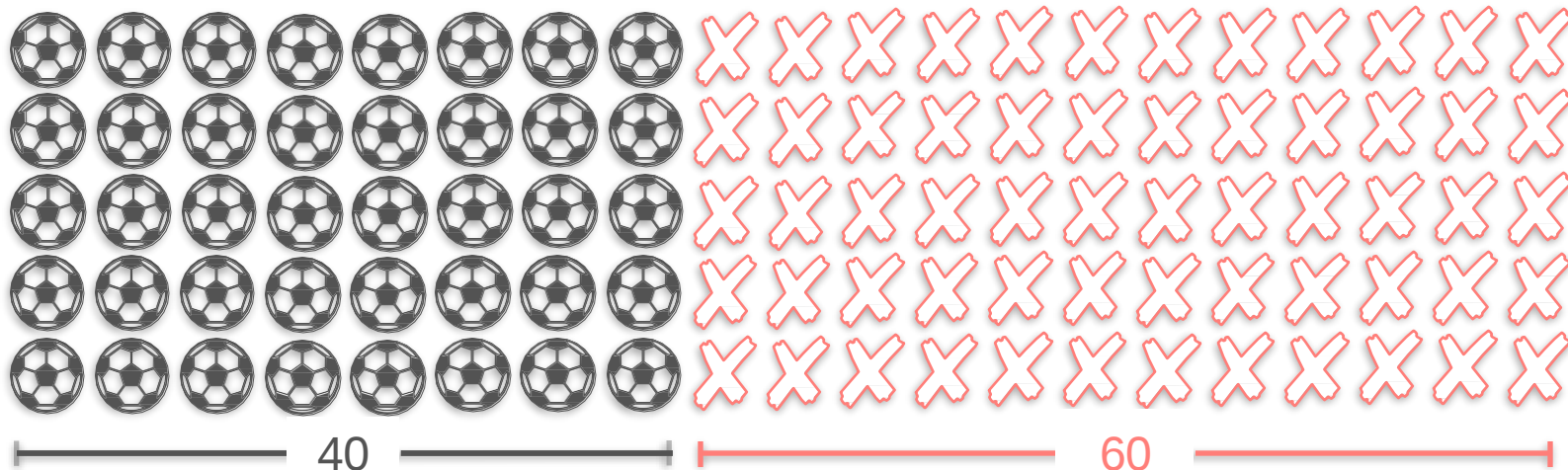
Bağımsızlık: Quiz 1



Quiz 1 Çözüm



Bağımsızlık: Quiz 2



1 30 çocuk	2 70 çocuk
----------------------	----------------------

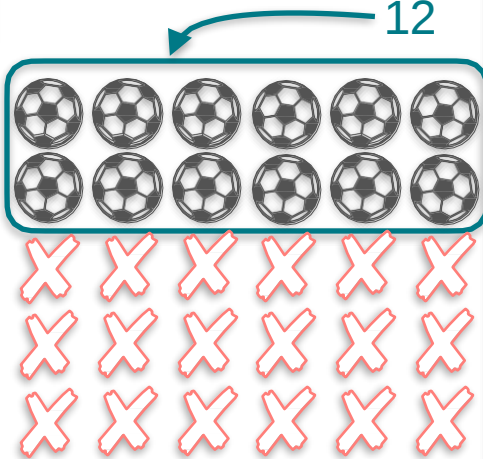
100 çocuk

1.odada (küçük oda) kaç çocuk futbol oynamayı sever?

Quiz 2 Çözüm

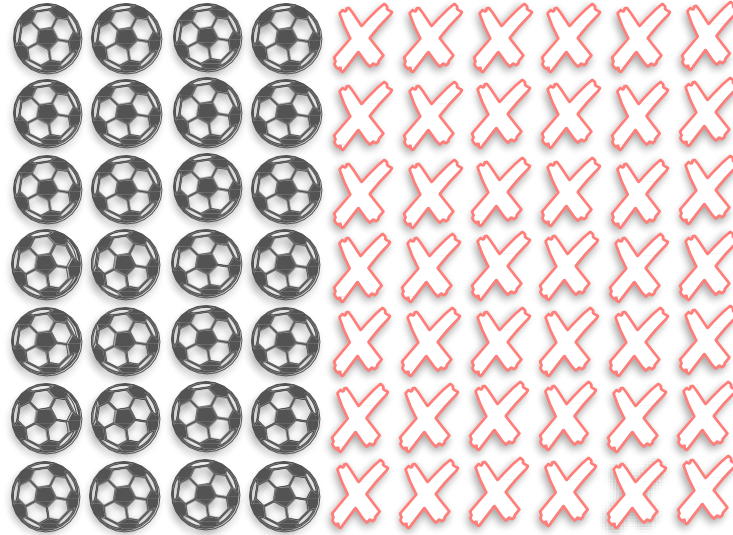


Oda 1



30 çocuk

Oda 2



70 çocuk

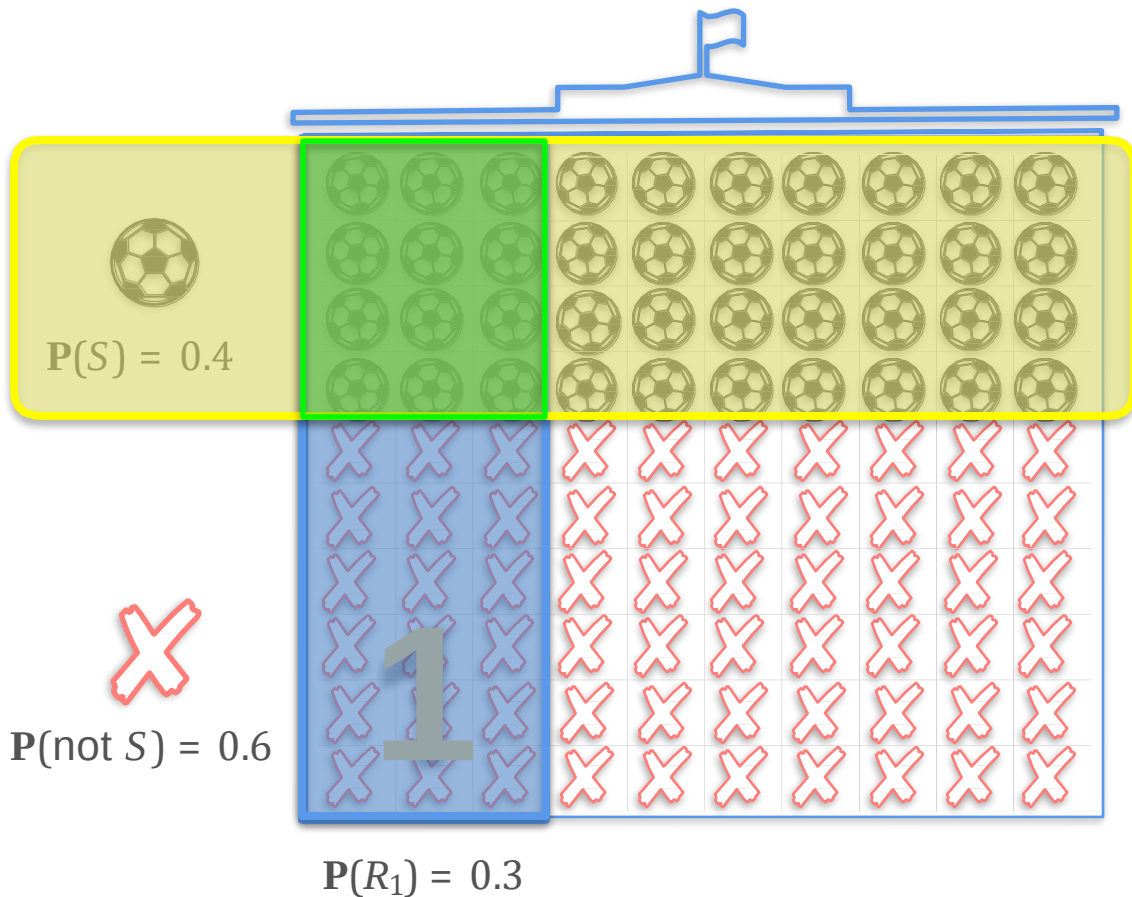
Bağımsız Olaylar

$P(\text{Soccer and Room 1})$

$$P(S \cap R_1) = P(S) \bullet P(R_1)$$

$$= 0.4 \bullet 0.3$$

$$= 0.12$$



Çarpım Kuralı (Bağımsız Olaylar için)

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$$

Bağımsız Olaylar: Bozuk Para Örneği 1



50% 50%

Madeni paranın beş kez de tura gelme olasılığı nedir?



Bağımsız Olaylar: Bozuk Para Örneği 1



50% 50%

Madeni paranın beş kez de tura gelme olasılığı nedir?

$$P(5 \text{ heads}) = \frac{\text{H}}{\text{H} \quad \text{T}} \quad \blacksquare \quad \frac{\text{H}}{\text{H} \quad \text{T}} \quad \blacksquare \quad \frac{\text{H}}{\text{H} \quad \text{T}} \quad \blacksquare \quad \frac{\text{H}}{\text{H} \quad \text{T}} \quad \blacksquare \quad \frac{\text{H}}{\text{H} \quad \text{T}}$$

1 1 1 1 1
2 2 2 2 2

Bağımsız Olaylar: Bozuk Para Örneği 1



50% 50%

Madeni paranın beş kez de tura gelme olasılığı nedir?

$$P(5 \text{ heads}) = \left(\frac{\text{H} \quad \text{T}}{\text{H} \quad \text{T}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$$

Bağımsız Olaylar: Zar Örneği 1


$$P(6) = \frac{\text{Number of outcomes with 6 dots}}{\text{Total number of outcomes}} = \frac{1}{6}$$


Bağımsız Olaylar: Zar Örneği 1



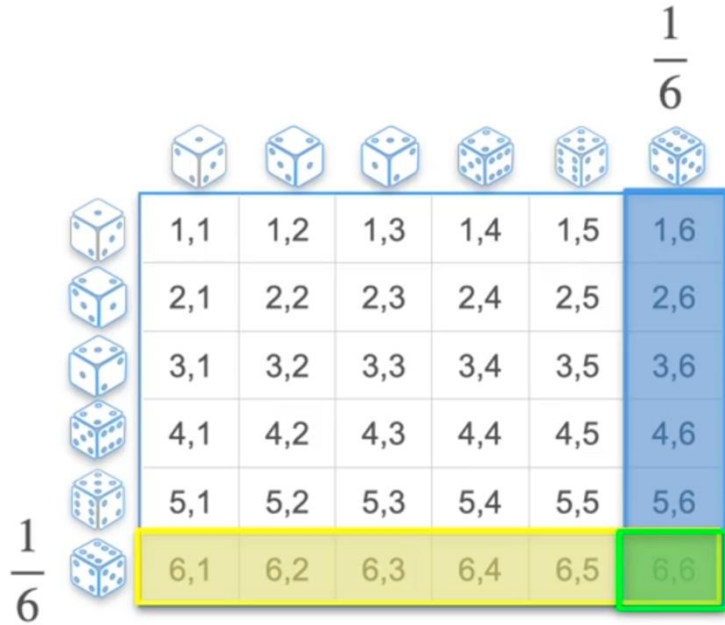
2 dice

						
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$P(6,6) = \frac{\text{6,6}}{\text{6,6} \text{ to } 6,6} = \frac{1}{36}$$

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Bağımsız Olaylar: Zar Örneği 1



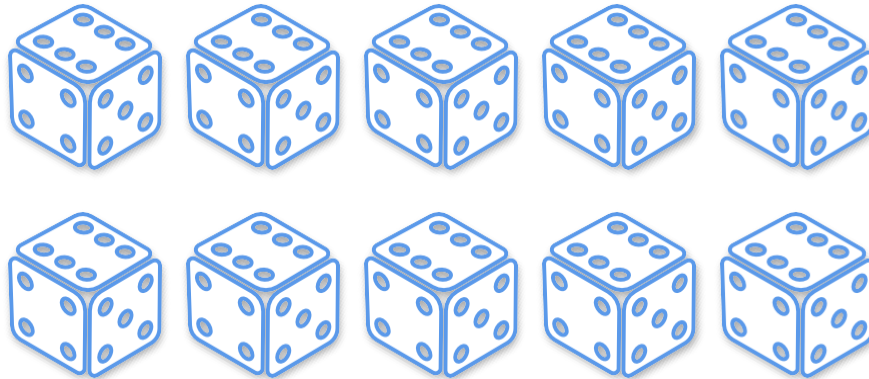
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

2 dice

$$P(6,6) = \frac{\text{1 die showing 6}}{\text{6 possible outcomes}} \cdot \frac{\text{1 die showing 6}}{\text{6 possible outcomes}}$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Bağımsız Olaylar: Zar Örneği 2

10 farklı zar atılırsa hepsinin 6 gelme olasılığı nedir?



Bağımsız Olaylar: Zar Örneği 2

10 farklı zar atılırsa hepsinin 6 gelme olasılığı nedir?

$$\mathbf{P(10\ sixes)} = \left(\frac{\text{1 six} \text{ (1 die)}}{\text{6 possible outcomes (6 sides)}} \right)^{10}$$
$$= \left(\frac{1}{6} \right)^{10}$$



DeepLearning.AI

Doğum Günü Problemi

Quiz

- Partiye 30 kişi katılmış;
 - 2 kişinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı nedir?
 - 2 kişinin aynı doğum gününe sahip olmama olasılığı nedir?
- (Yılın 365 gün olduğunu ve hiç kimsenin 29 Şubatta doğmadığını kabul edelim)

Quiz

- Cevap: 2 kişinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı daha yüksektir.
- İki kişinin aynı doğum gününe sahip **olmama** olasılığı yaklaşık 0.3 civarındadır

1.000.000 TL

Matematikteki ünlü probleme göre, bir odada en az kaç kişi varsa bunlardan ikisinin miladi doğum gününün aynı gün olma ihtimali, hepsininkinin farklı olması ihtimalinden daha fazladır?

♦ A: 23

♦ B: 123

♦ C: 223

♦ D: 323

Herkesin farklı günde doğmuş olma olasılığı

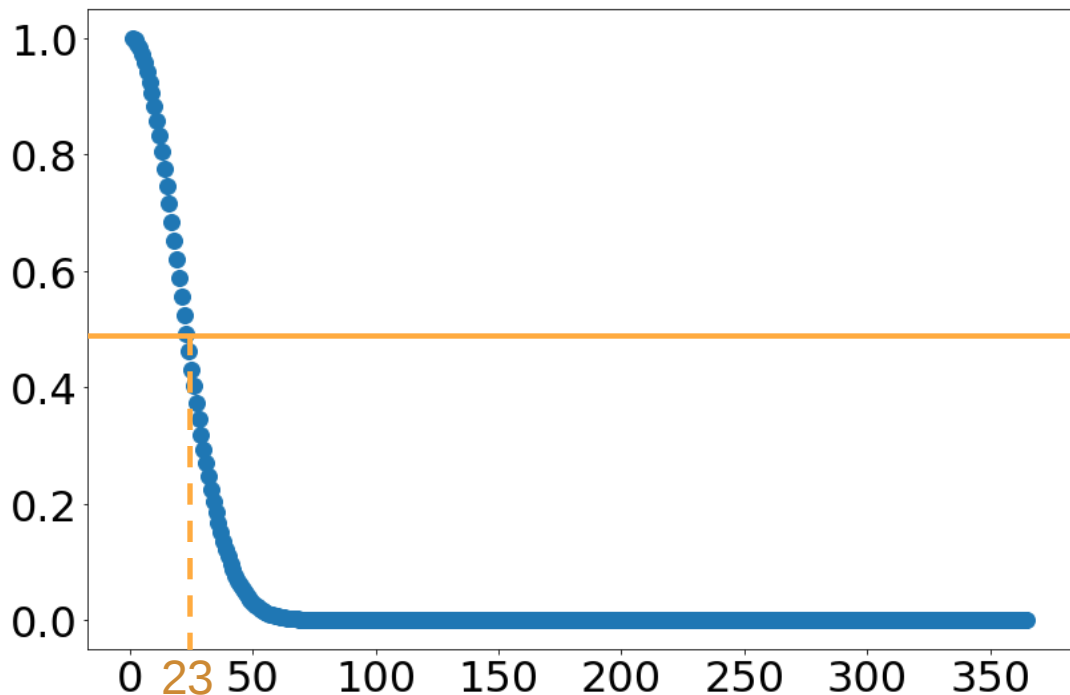


$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \cdot \frac{360}{365} \cdot \frac{359}{365} \cdot \frac{358}{365} \cdot \frac{357}{365} = 0.905$$

Bu 9 kişinin farklı günlerde doğmuş olma olasılığı %90 civarı ve oldukça yüksek çünkü popülasyon az.

Herkesin farklı günde doğmuş olma olasılığı

1 person: 1
2 people: 0.997
3 people: 0.992
4 people: 0.984
5 people: 0.973
10 people: 0.883
20 people: 0.589
23 people: 0.493
30 people: 0.294
50 people: 0.030
100 people: 0.0000003
365 people: 0



Matematikteki ünlü probleme göre, bir odada en az kaç kişi varsa bunlardan ikisinin miladi doğum gününün aynı gün olma ihtimali, hepsininkinin farklı olması ihtimalinden daha fazladır?

♦ A: 23

♦ B: 123

♦ C: 223

♦ D: 323



DeepLearning.AI

Koşullu Olasılık-1

Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 1

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir

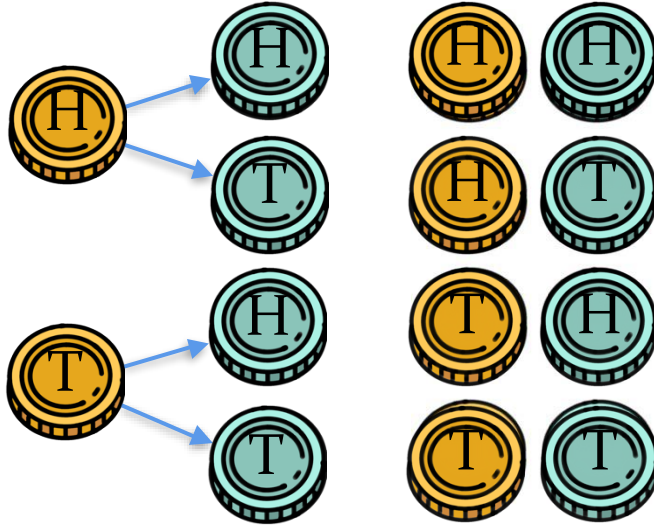


50% 50%

HH gelme olasılığı nedir?

1st

2nd



$$P(HH) = \frac{\text{Number of outcomes where HH occurs}}{\text{Total number of outcomes}} = \frac{1}{4}$$

Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 1

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir



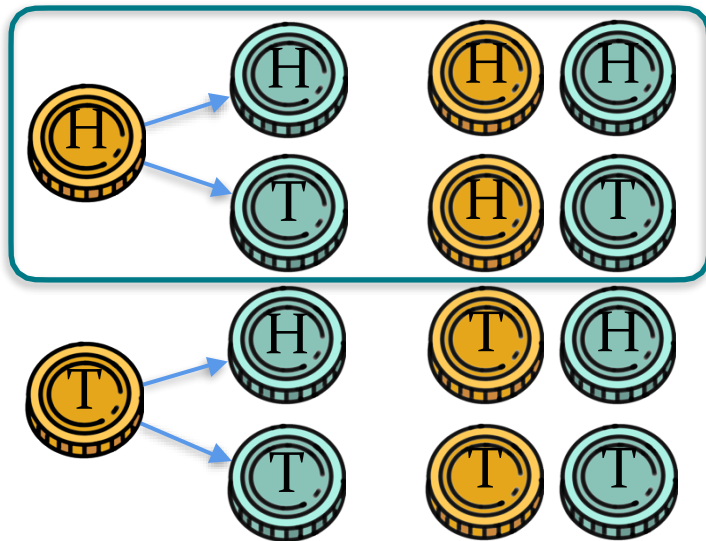
50% 50%

HH gelme olasılığı nedir?

1st

2nd

İlkinin **tura(H)** geldiği VERİLSİN



$$P(HH | 1st \text{ is } H)$$



$$= \frac{1}{2}$$

Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 1

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir

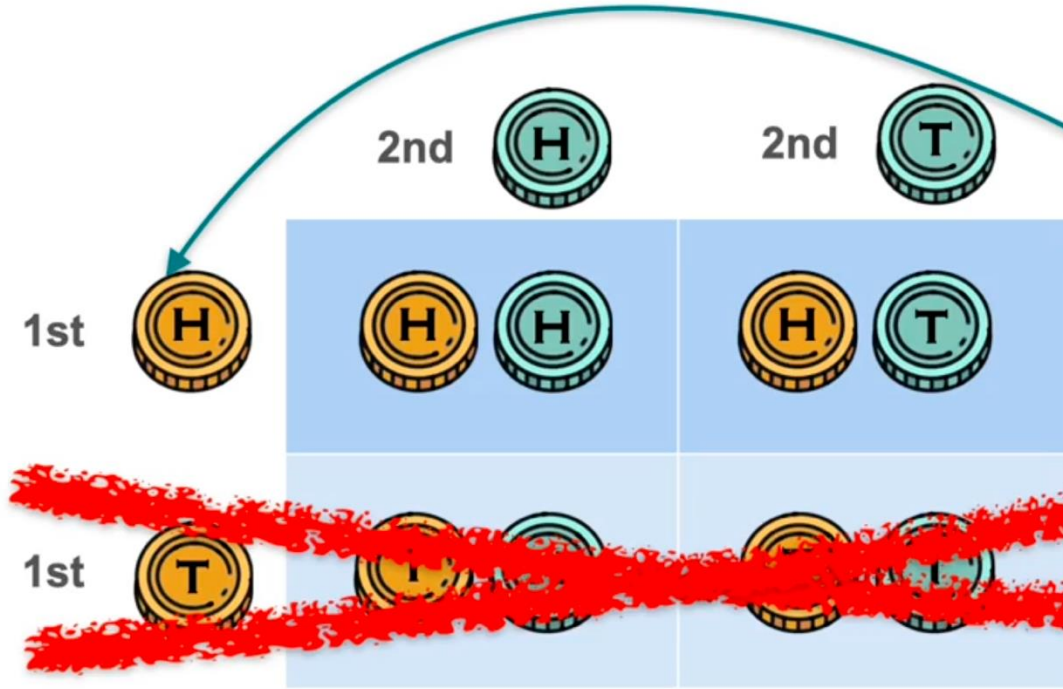
HH gelme olasılığı nedir?

İlkinin **tura(H)** geldiği VERİLSİN

$$\mathbf{P}(HH \mid \text{1st is } H)$$

Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 1

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir



HH gelme olasılığı nedir?

İlkinin **tura(H)** geldiği VERİLSİN

$$P(HH | 1st \text{ is } H) = \frac{\begin{array}{cc} \text{H} & \text{H} \\ \text{H} & \text{H} \\ \text{H} & \text{T} \end{array}}{\begin{array}{cc} \text{H} & \text{H} \\ \text{H} & \text{H} \\ \text{H} & \text{T} \end{array}} = \frac{1}{2}$$

Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 2

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir

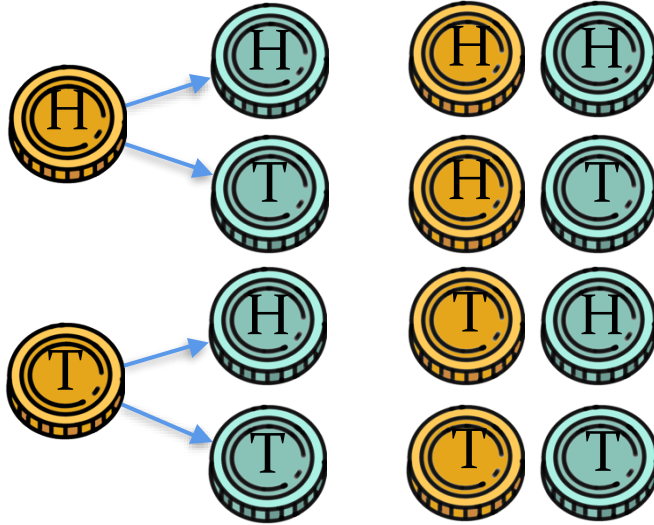


50% 50%

HH gelme olasılığı nedir?

1st

2nd



$$P(HH) = \frac{\text{Number of HH outcomes}}{\text{Total number of outcomes}} = \frac{1}{4}$$

Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 2

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir



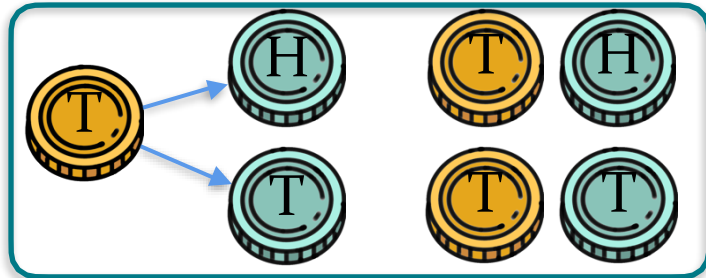
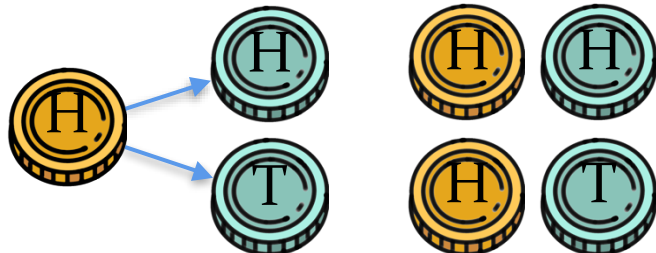
50% 50%

HH gelme olasılığı nedir?

1st

2nd

İlkinin **yazı(T)** geldiği VERİLSİN

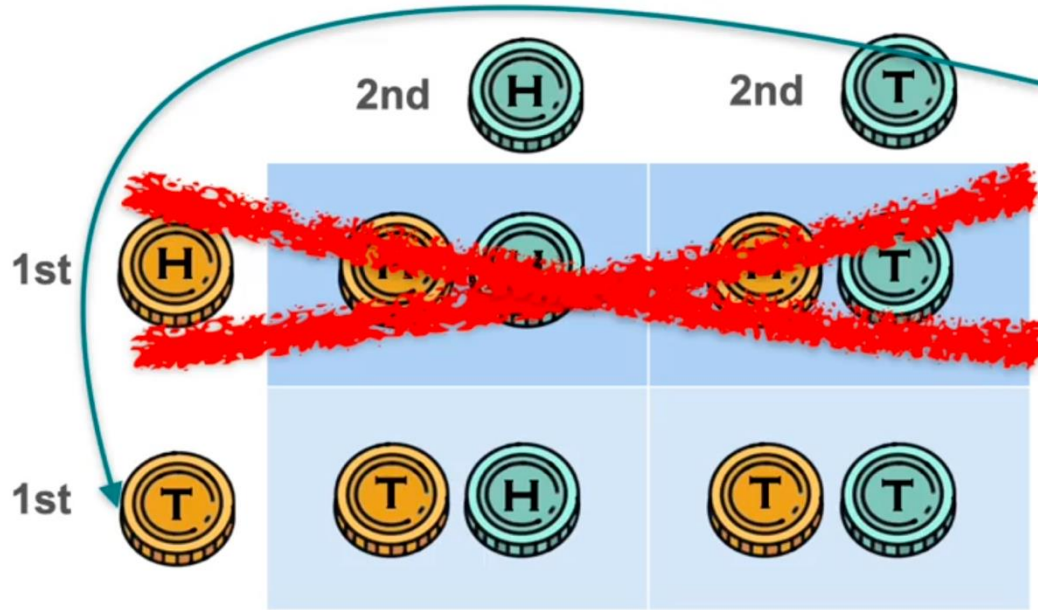


$$P(HH | 1st \text{ is } T) = \frac{0}{\text{Total Outcomes}} = 0$$



Şartlı Olasılık: Bozuk Para Örneği 2

koşul olduğu durumda
örnek uzay değişir



HH gelme olasılığı nedir?

İlkinin **yazı(T)** geldiği VERİLSİN

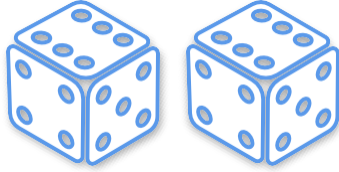
$$P(HH | 1st \text{ is } T) = \frac{\text{Number of outcomes where } HH \text{ and } 1st \text{ is } T}{\text{Number of outcomes where } 1st \text{ is } T} = 0$$

Çarpım Kuralı (Bağımsız Olaylar için)

A ve B bağımsız olduğunda

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 3



İki zar atılıyor ilkinin 6 **VE** toplamın = 10 olma olasılığı nedir?



					
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$P(\text{1st is 6} \cap \text{sum} = 10) =$

6,4

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$= \frac{1}{36}$$

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 3



1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$P(1\text{st is } 6 \cap \text{sum} = 10) =$$

$$P(1\text{st is } 6)$$

6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
-----	-----	-----	-----	-----	-----

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$\frac{6}{36}$$

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 3



1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$P(1\text{st is } 6 \cap \text{sum} = 10) =$$

$$P(1\text{st is } 6)$$

6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
-----	-----	-----	-----	-----	-----

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$\frac{1}{6}$$

$$P(\text{sum} = 10 \mid 1\text{st } 6)$$

6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
-----	-----	-----	-----	-----	-----

$$\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36}$$

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 3



1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

=

6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

■

6,4

6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
-----	-----	-----	-----	-----	-----

$$P(\text{1st is 6} \cap \text{sum} = 10) = P(\text{1st is 6}) \quad \blacksquare \quad P(\text{sum} = 10 \mid \text{1st 6})$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Genel Çarpım Kuralı

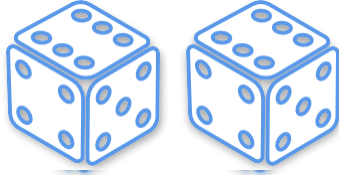
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A)$$



bağımsız olduğu durumda

$$\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$$

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 1



Rastgele atılan iki zarın toplamının 10 olma olasılığı nedir?



1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$P(\text{sum} = 10) =$

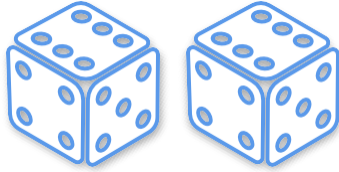


6,4
5,5
4,6

$= \frac{3}{36}$

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 1



Rastgele atılan iki zarın toplamının 10 olma olasılığı nedir?

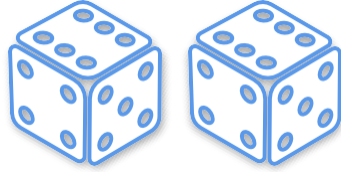
Birinci zarın 6 olduğu VERİLDİĞİNDE

						
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$P(\text{sum} = 10 \mid \text{1st is } 6) = \frac{\boxed{6,4}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \\ \hline \end{array}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 2

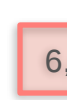


Toplamın 10 olma olasılığı nedir?



1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

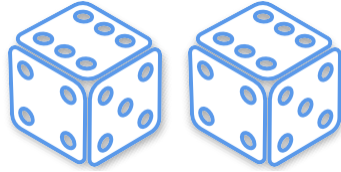
$$P(\text{sum} = 10) = \frac{\text{Number of outcomes summing to 10}}{36} = \frac{3}{36}$$



4,6
5,5
6,4

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Koşullu Olasılık: Zar Örneği 2



	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Toplamin 10 olma olasılığı nedir?

Birincinin 1 olduğu VERİLDİĞİNDE

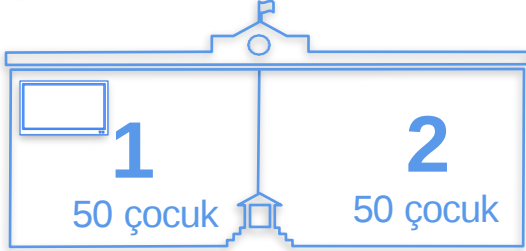
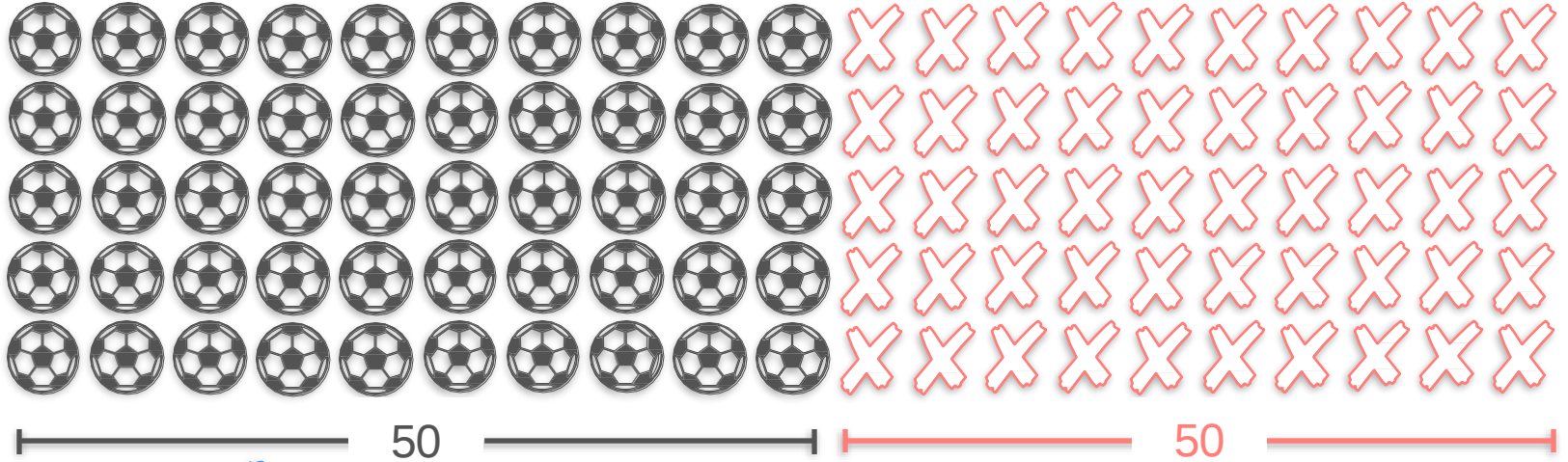
$$P(\text{sum} = 10 \mid \text{1st is 1}) = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1,1 & 1,2 & 0 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ \hline \end{array}} = 0$$



DeepLearning.AI

Koşullu Olasılık-2

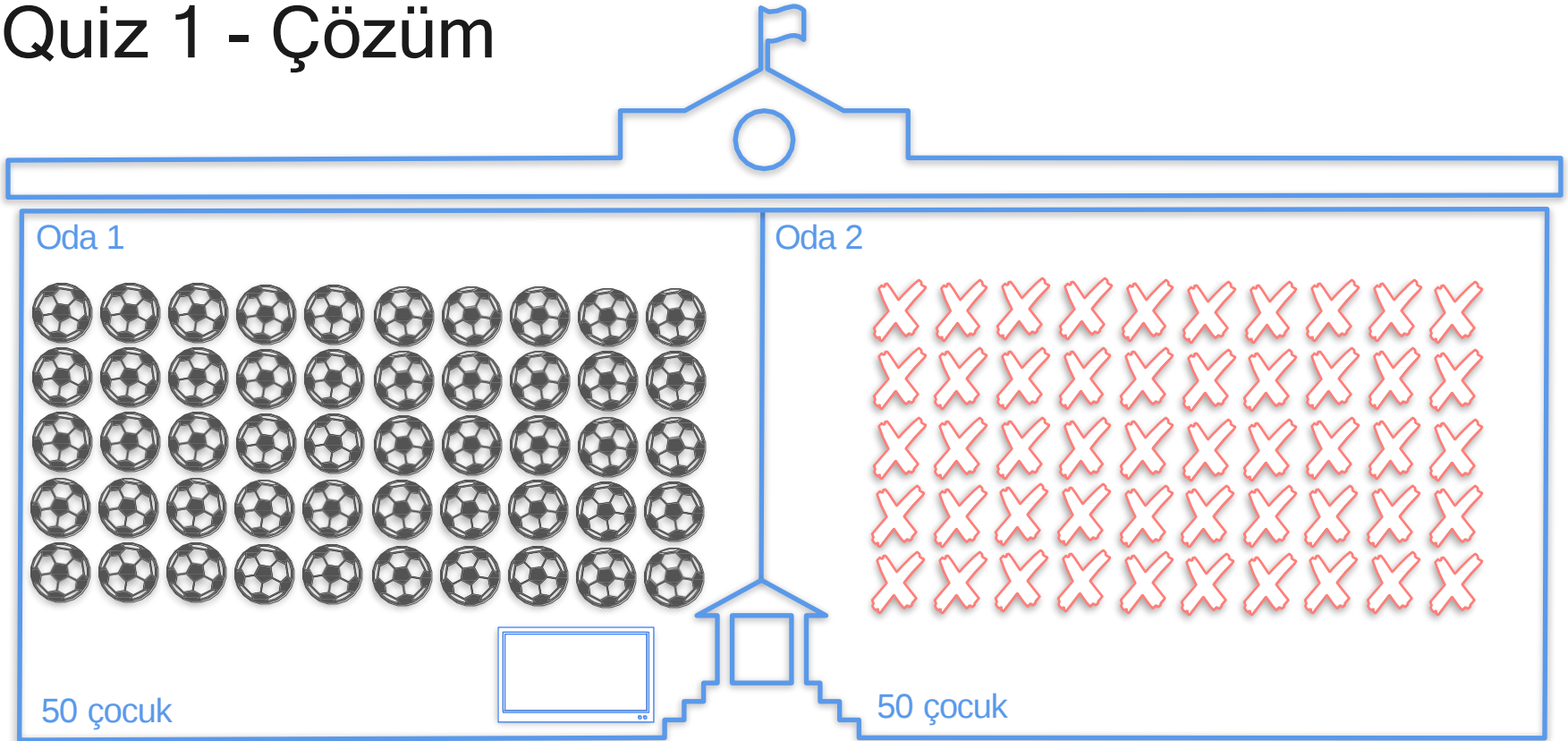
Quiz 1



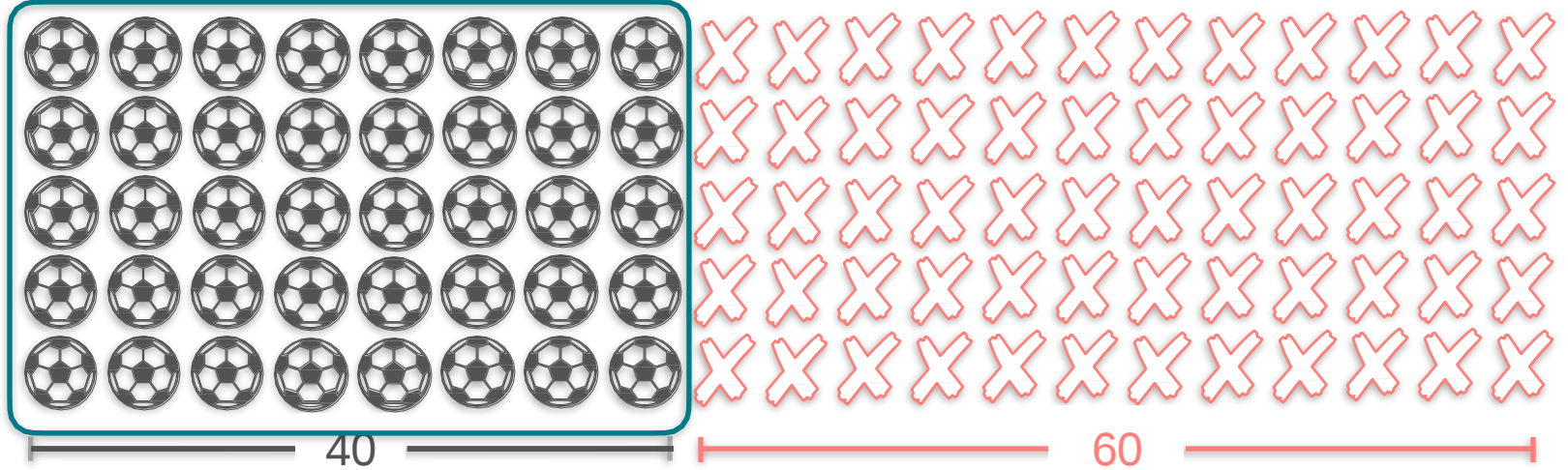
100 çocuk

Birinci odada futbolu seven kaç çocuk vardır?

Quiz 1 - Çözüm



Quiz 2



80%

100 çocuk

Kaç çocuk futbol oynuyor ve koşu ayakkabısı giyiyor?

Quiz 2 - Çözüm



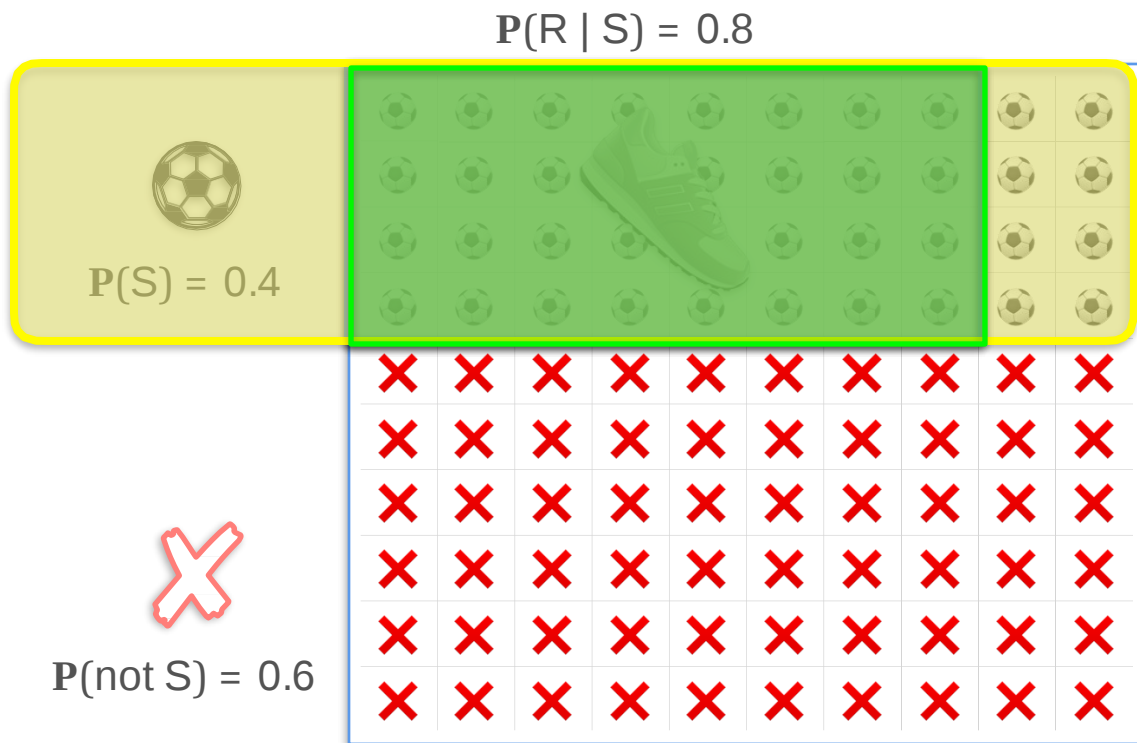
Koşullu Olasılık

$P(\text{Soccer and Running shoes})$

$$P(S \cap R) = P(S) \cdot P(R|S)$$

$$= 0.4 \cdot 0.8$$

$$= 0.32$$



Koşullu Olasılık

$P(\text{Soccer and Running shoes})$

$$P(S \cap R) = 0.32$$



$$P(S) = 0.4$$

$P(\text{not Soccer and Running shoes})$

$$P(\text{not } S \cap R) = P(\text{not } S) \blacksquare P(R|\text{not } S)$$

$$= 0.6 \blacksquare 0.5$$

$$= 0.3$$

$$P(\text{not } S) = 0.6$$

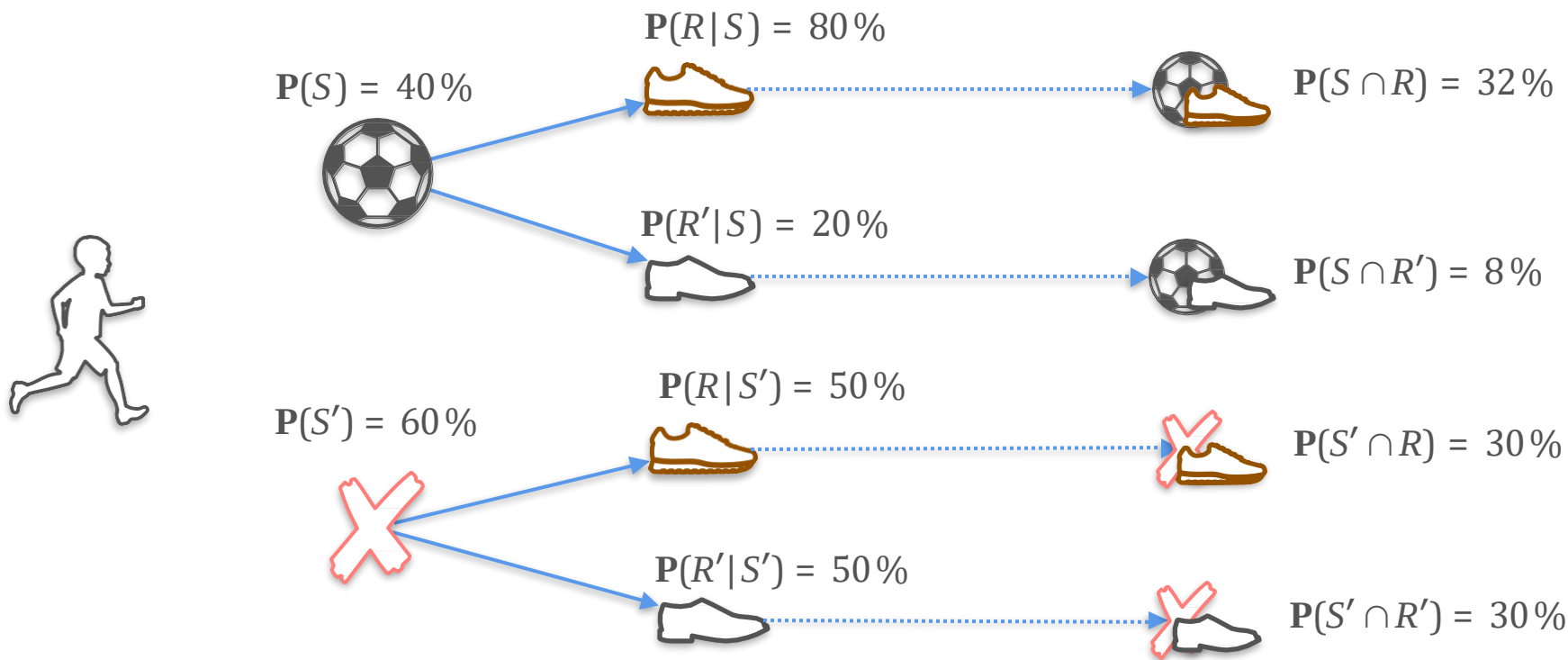


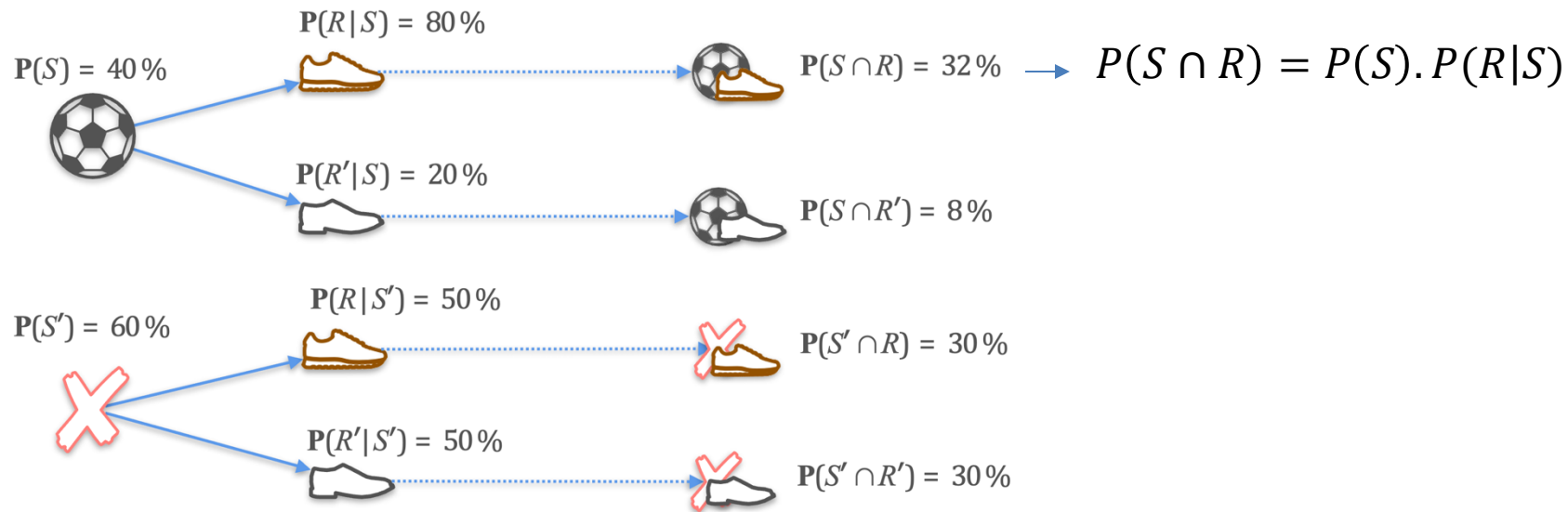
$$P(R|S) = 0.8$$



$$P(R|\text{not } S) = 0.5 \text{ (varsayalım)}$$

Koşullu Olasılık (olasılık ağacı)



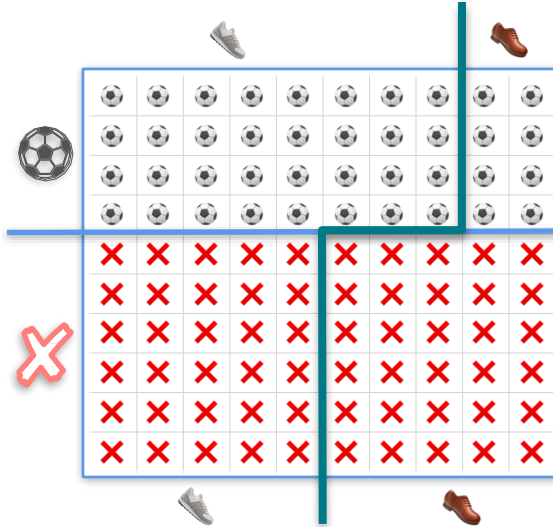


Bağımsız vs Bağımlı Olaylar

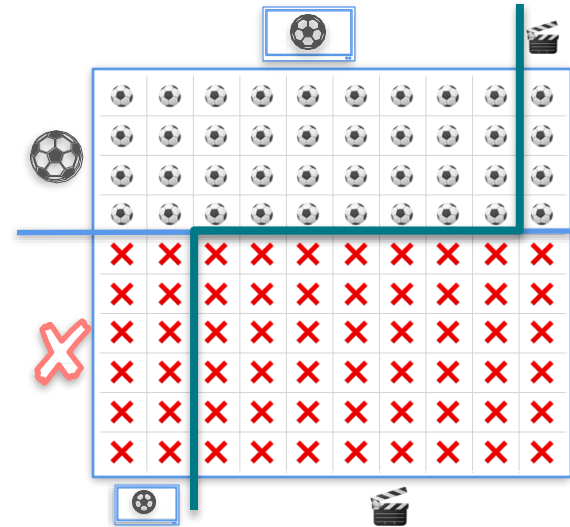
Bağımsız



Bağımlı



Bağımlı





DeepLearning.AI

Özet

Koşullu Olasılık

A ve B meydana gelme olasılıkları sıfır olmayan Ω da tanımlı iki olay olsun. A olayı olduktan sonra B olayının olma olasılığı B'nin koşullu olasılığı olarak adlandırılır ve $P(B|A)$ olarak tanımlanır.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B, A)}{P(A)} = \frac{P(BA)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

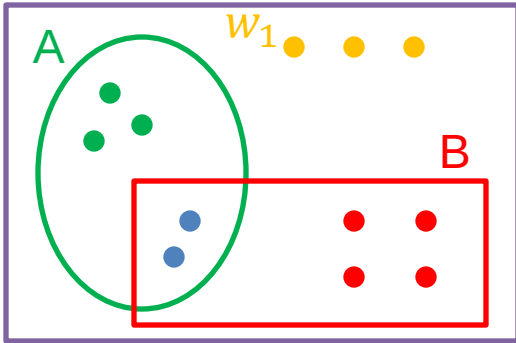
Benzer şekilde B olayı verildiğinde A olayının olasılık değeri;

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Koşullu Olasılık

A ve B, Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. Ω örnek uzayı eşit olasılıklara sahip 12 sonuçtan oluşsun.

Ω sayılabilir (ayrık) ve $|\Omega| = 12$



$$P(A) = ?$$

$$P(B) = ?$$

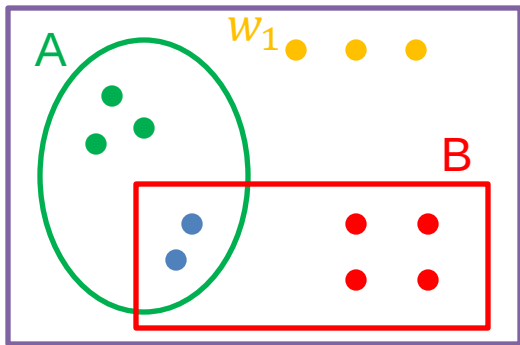
$$P(A \cap B) = ?$$

$$P(A \cup B) = ?$$

Koşullu Olasılık

A ve B Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. Ω örnek uzayı eşit olasılıklara sahip 12 sonuçtan oluşsun.

Ω sayılabilir (ayrık) ve $|\Omega| = 12$



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{12}$$

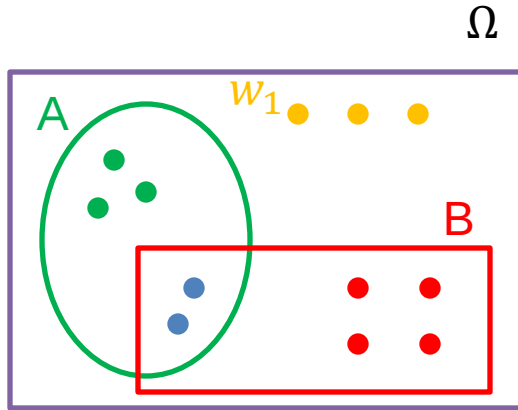
$$P(B) = \frac{6}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9}{12}$$

Koşullu Olasılık

A ve B, Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. Ω örnek uzayı eşit olasılıklara sahip 12 sonuçtan oluşsun.



Ω

$A \cap B$: Sonucun A **ve** B [Hem A, Hem de B]'de olması

$A \cup B$: Sonucun A **veya** B [Yalnız A, Yalnız B, A ve B]'de olması

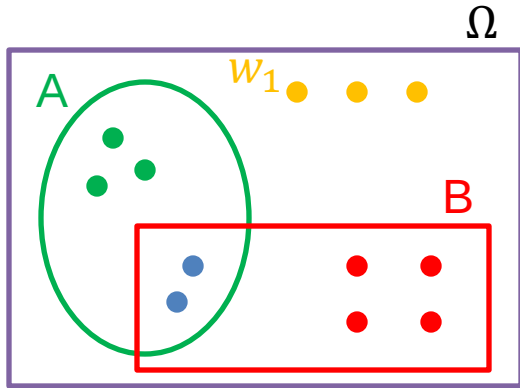
Koşullu Olasılık

Deney gerçekleştikten sonra sonucun B kümesinde olduğu gözlemlendi. Bu durumda sonucun A kümesinden olma olma olasılığı nedir?

$P(A|B) = ?$ B gözlemlendiğinde A'nın olma olasılığı
B verildiğinde A'nın olma olasılığı } **Koşullu** olasılık

$P(A) = ?$ } **Koşulsuz / Şartsız** olasılık

Koşullu Olasılık



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

} Koşullu (şartlı) olasılık

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

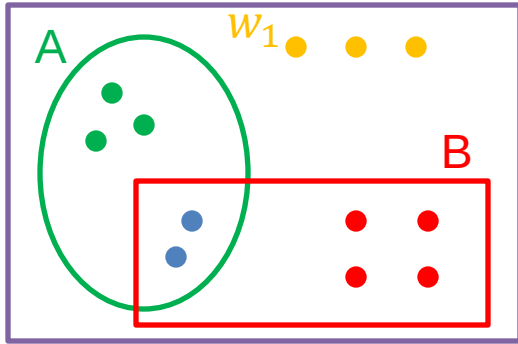
} Koşullu (şartlı) olasılık

↓
fark

Koşullu Olasılık

A ve B, Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. Ω örnek uzayı eşit olasılıklara sahip 12 sonuçtan oluşsun.

Ω sayılabilir (ayrık) ve $|\Omega| = 12$



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{2}{6}$$

Koşullu Olasılık

Ödev: Madeni bir para 3 kez atılıyor ve A,B iki olay aşağıdaki gibi tanımlanıyor

$A = \{\text{Turaların sayılarının yazılardan fazla olduğu sonuçlar}\}$

$B = \{\text{İlk atışın tura olduğu sonuçlar}\}$

$$P(A) = ?$$

$$P(B) = ?$$

$$P(A|B) = ?$$

$$P(B|A) = ?$$

Çarpım Kuralı

A ve B, Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. A ve B'nin beraber gerçekleşme olasılığı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$P(A \cap B) = P(A, B) = ?$$

1.yol: Direkt hesaplama

$$\{A, A^C\} \times \{B, B^C\} = AB, AB^C, A^C B, A^C B^C$$

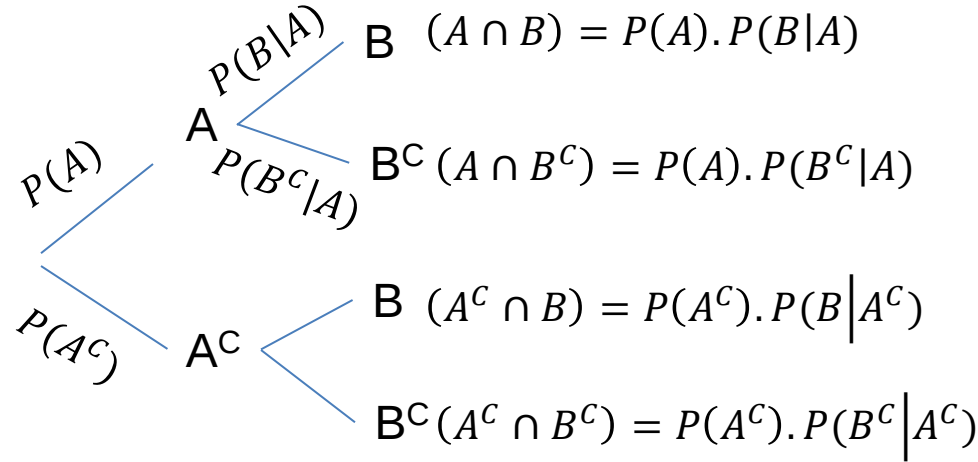
Çarpım Kuralı

A ve B, Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. A ve B'nin beraber gerçekleşme olasılığı aşağıdaki gibi bulunabilir.

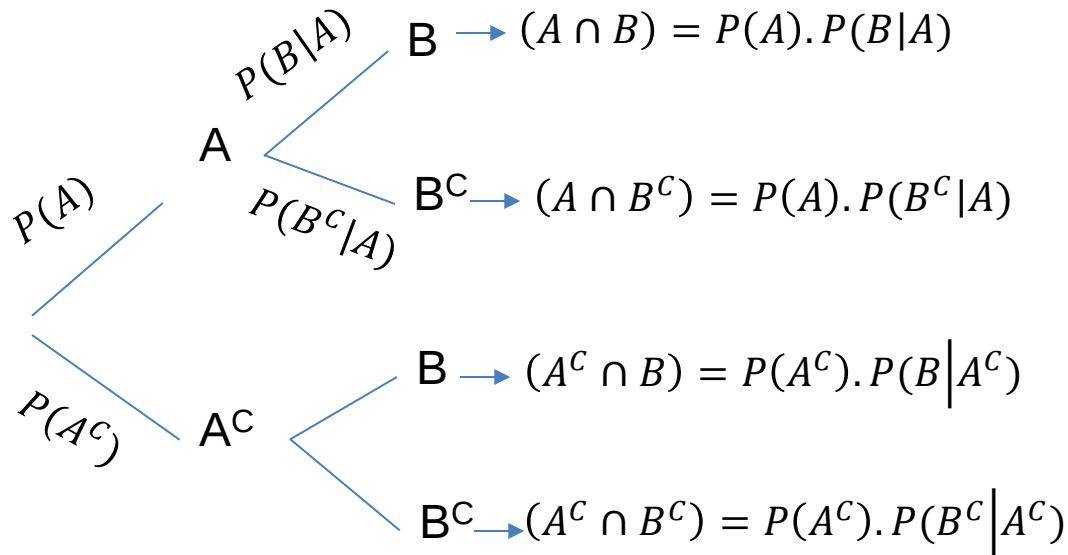
$$P(A \cap B) = P(A, B) = ?$$

1.yol: Direkt hesaplama

$$\{A, A^c\} \times \{B, B^c\} = AB, AB^c, A^cB, A^cB^c$$



Çarpım Kuralı



Çarpım Kuralı

A ve B Ω örnek uzayında tanımlı iki olay olsun. A ve B'nin beraber gerçekleşme olasılığı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$P(A \cap B) = P(A, B) = ?$$

Koşullu olasılığın tanımını kullanırsak:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Çarpım Kuralı

Çarpım Kuralı

Benzer şekilde

$$P(A \cap B) = P(A, B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Çarpım Kuralı

Çarpım Kuralı

Ödev: Bir torbada 40 tane mavi 10 tane kırmızı top vardır. Çekilen top yerine konulmaksızın rastgele iki top sırayla çekiliyor.

Çekilen her iki topun kırmızı olma olasılığı?

$A = \{\text{ilk çekilen top kırmızı}\}$

$$P(A) = ?$$

$B = \{\text{ikinci çekilen top kırmızı}\}$

$$P(B|A) = ? \rightarrow \text{çekilen ilk top kırmızı ise}$$

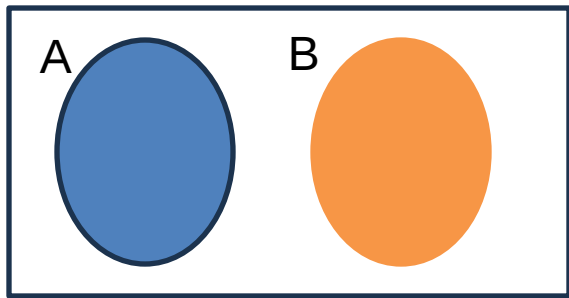
ikinci topun kırmızı olma olasılığı

$$P(A \cap B) = ?$$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

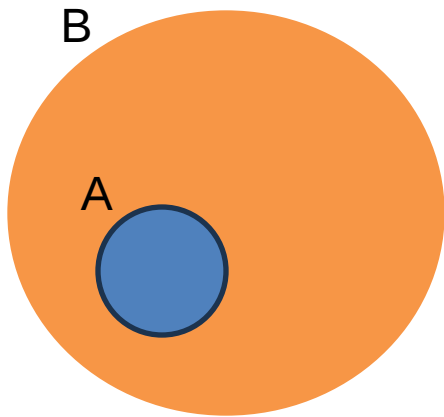
1 $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B bağıdaşmaz (ayrık) olaylardır

Bu durumda $P(A|B) = P(B|A) = 0$ olur. ($A \cap B = \emptyset$) ve $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$



Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

2 $A \subset B$ ise $P(B|A) = 1$ olur. $P(A|B) = 0$



Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

3 A ve B **bağımsız** ise

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ olur}$$

Buradan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

$P(A \cap B) = P(A|B).P(B) \rightarrow$ her zaman geçerli

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \rightarrow$ A ve B bağımsızsa geçerli

$P(A \cap B) = 0 \rightarrow$ A ve B ayrık bağıdaşmaz olaylardır

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

Örnek: Zar atma deneyi

A: Tek sayı gelmesi = $\{1,3,5\}$

B: Çift sayı gelmesi = $\{2,4,6\}$

C: 1 veya 2 gelmesi = $\{1,2\}$

a- A ve B bağımsız mıdır?

b- A ve C bağımsız mıdır?

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

Çözüm:

A: Tek sayı gelmesi = {1,3,5}

B: Çift sayı gelmesi = {2,4,6}

C: 1 veya 2 gelmesi = {1,2}

$$\text{a-)} P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \stackrel{?}{=} \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$$

$$0 \neq \frac{9}{36} \text{ olduğundan } A \text{ ve } B \text{ bağımlıdır}$$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

Çözüm:

A: Tek sayı gelmesi = {1,3,5}

B: Çift sayı gelmesi = {2,4,6}

C: 1 veya 2 gelmesi = {1,2}

a-) $P(A|B) \neq P(A)$ olduğundan A ve B *bağımlıdır*

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq P(A) \rightarrow A \text{ ve } B \text{ *bağımlı*}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \neq \frac{3}{6}$$

$P(A \cap B) = 0 \rightarrow A \text{ ve } B \text{ ayrıktır (bağıdaşmaz olaylardır)}$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

Çözüm:

A: Tek sayı gelmesi = {1,3,5}

B: Çift sayı gelmesi = {2,4,6}

C: 1 veya 2 gelmesi = {1,2}

$$\text{c-)} P(A \cap C) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$$

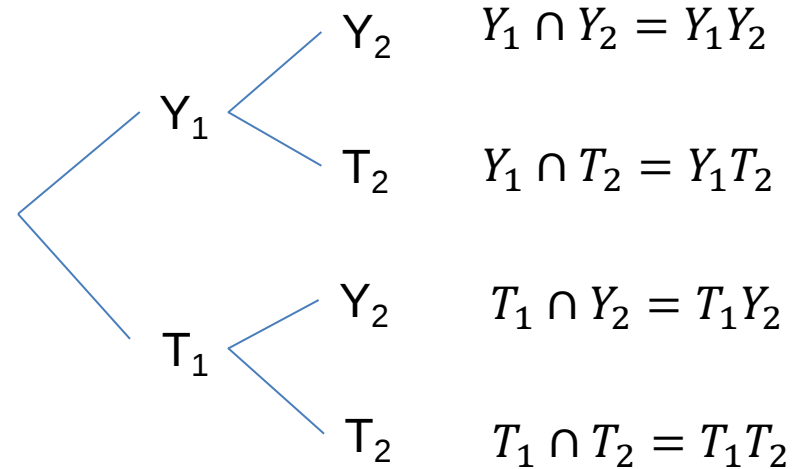
$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \text{ olduğundan } A \text{ ve } C \text{ bağımsızdır}$$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

Örnek: Yazı-Tura deneyi iki kez tekrarlanıyor. $P(Y) = \frac{1}{3}$ (*hileli para*) olduğuna göre en az bir tura gelme olasılığı nedir?

$$P(\Omega) = P\{Y, T\} = 1$$

$$P(Y) = \frac{1}{3}, \quad P(T) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$A = \{Y_1T_2, T_1Y_2, T_1T_2\} = P(A) \neq \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ (eşit olasılığa sahip olmadığından)}$$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

$$A = \{Y_1T_2, T_1Y_2, T_1T_2\} = P(A) \neq \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ (eşit olasılığa sahip olmadığından)}$$

$$A = \{Y_1T_2, T_1Y_2, T_1T_2\} = P(A) = P\{Y_1T_2, T_1Y_2, T_1T_2\}$$

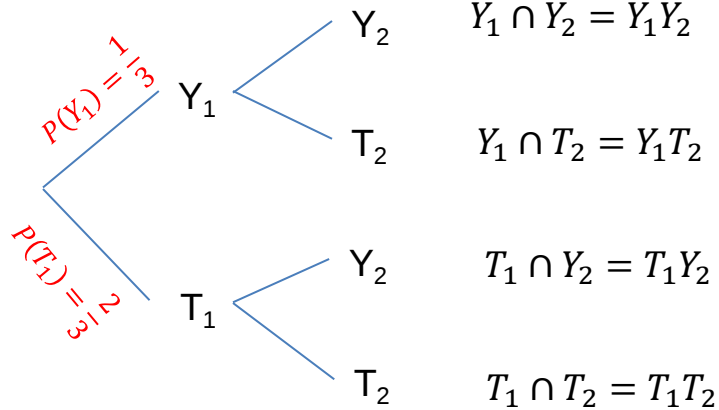
$$P(A) = P\{Y_1T_2\} + P\{T_1Y_2\} + P\{T_1T_2\}$$

?

?

?

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar



$$P(A) = P\{Y_1T_2\} + P\{T_1Y_2\} + P\{T_1T_2\}$$

? ? ?

$$P(Y_1 \cap Y_2) = P(Y_1Y_2) = \underbrace{P(Y_1)}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(Y_2|Y_1)}_{P(Y_2) = \frac{1}{3}}$$

$$P(Y_1Y_2) = P(Y_1) \cdot P(Y_2)$$

(Bağımsız Olay)

$$P(Y_1Y_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Bağımsız ve Bağıdaşmaz (Ayrık) Olaylar

$$\Omega = \{\underbrace{Y_1Y_2}_{\frac{1}{9}}, \underbrace{Y_1T_2}_{\frac{2}{9}}, \underbrace{T_1Y_2}_{\frac{2}{9}}, \underbrace{T_1T_2}_{\frac{4}{9}}\}$$

$$P(Y_1T_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$A = \{Y_1T_2, T_1Y_2, T_1T_2\} = P(A) \neq \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ (eşit olasılığa sahip olmadığından)}$$

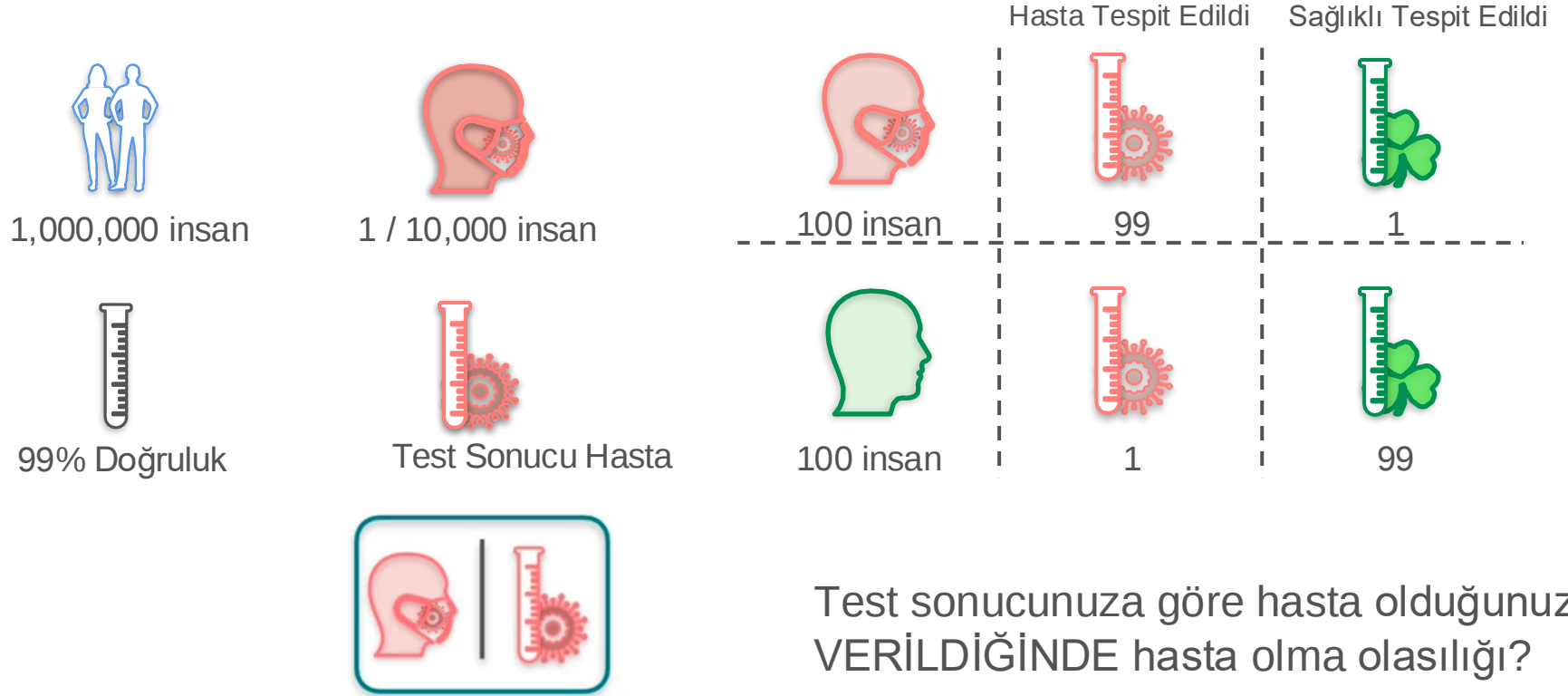
$$P(A) = P\{Y_1T_2\} + P\{T_1Y_2\} + P\{T_1T_2\} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$



DeepLearning.AI

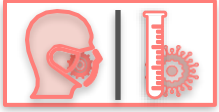
Bayes Teoremi - Sezgisel

Bayes Teoremi: Sezgisel



Test sonucunuza göre hasta olduğunuz
VERİLDİĞİNDE hasta olma olasılığı?

Bayes Teoremi: Sezgisel



Sağlıklı



999,900

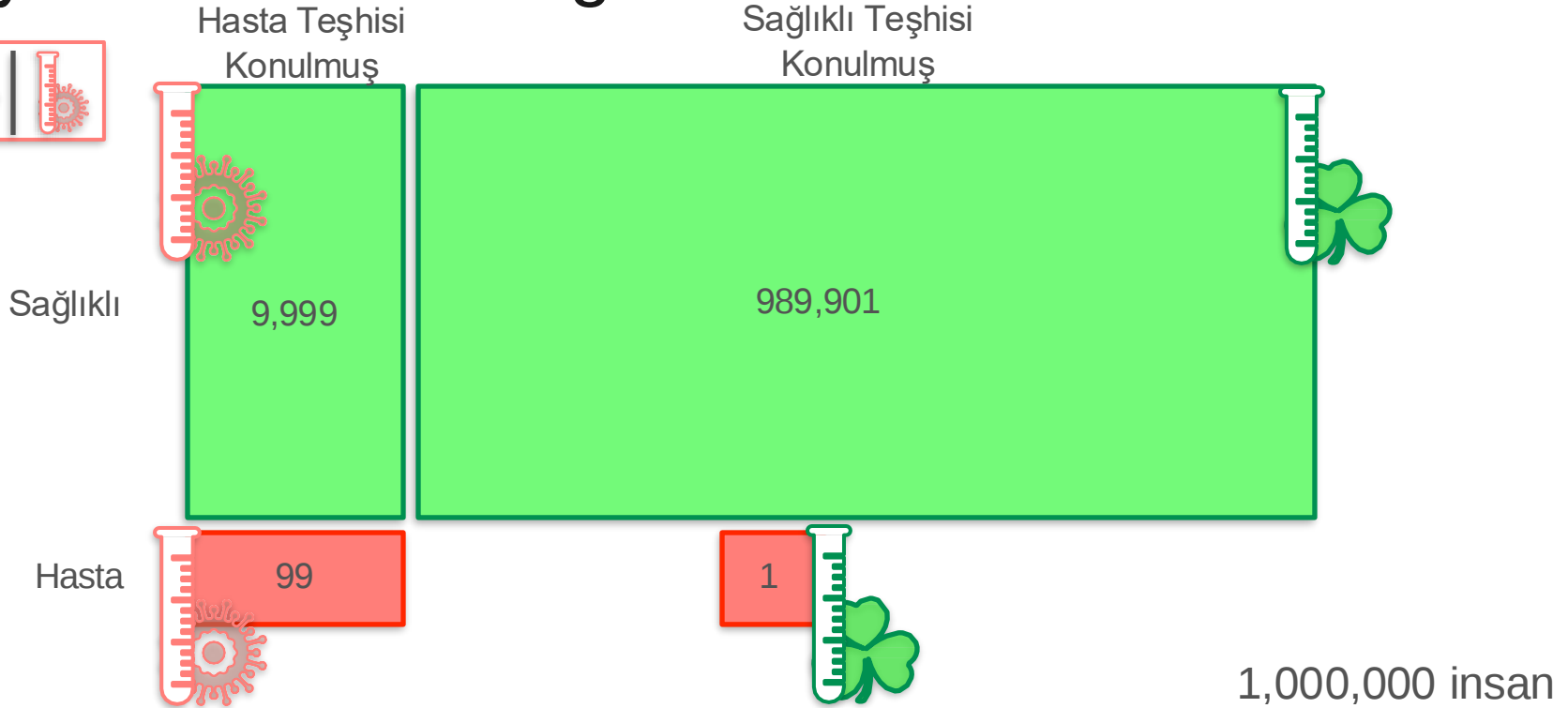
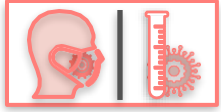
Hasta



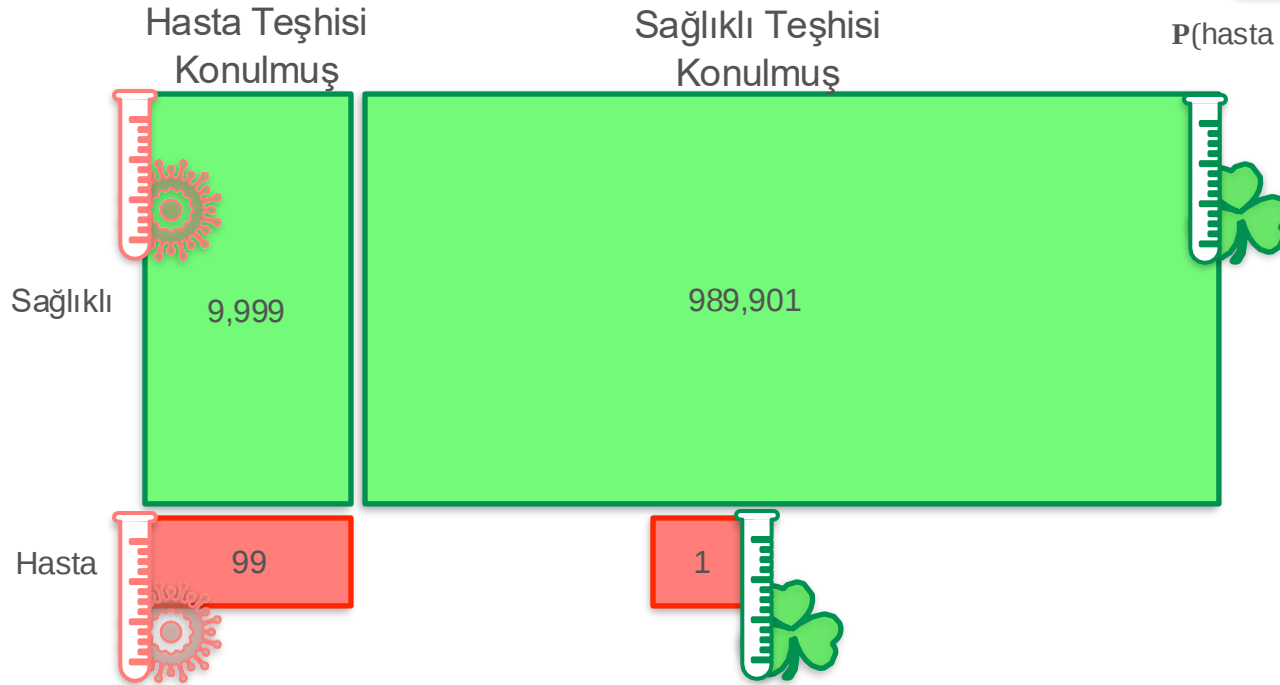
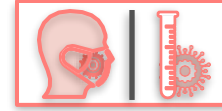
100

1,000,000 insan

Bayes Teoremi: Sezgisel



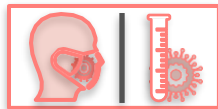
Bayes Teoremi: Sezgisel



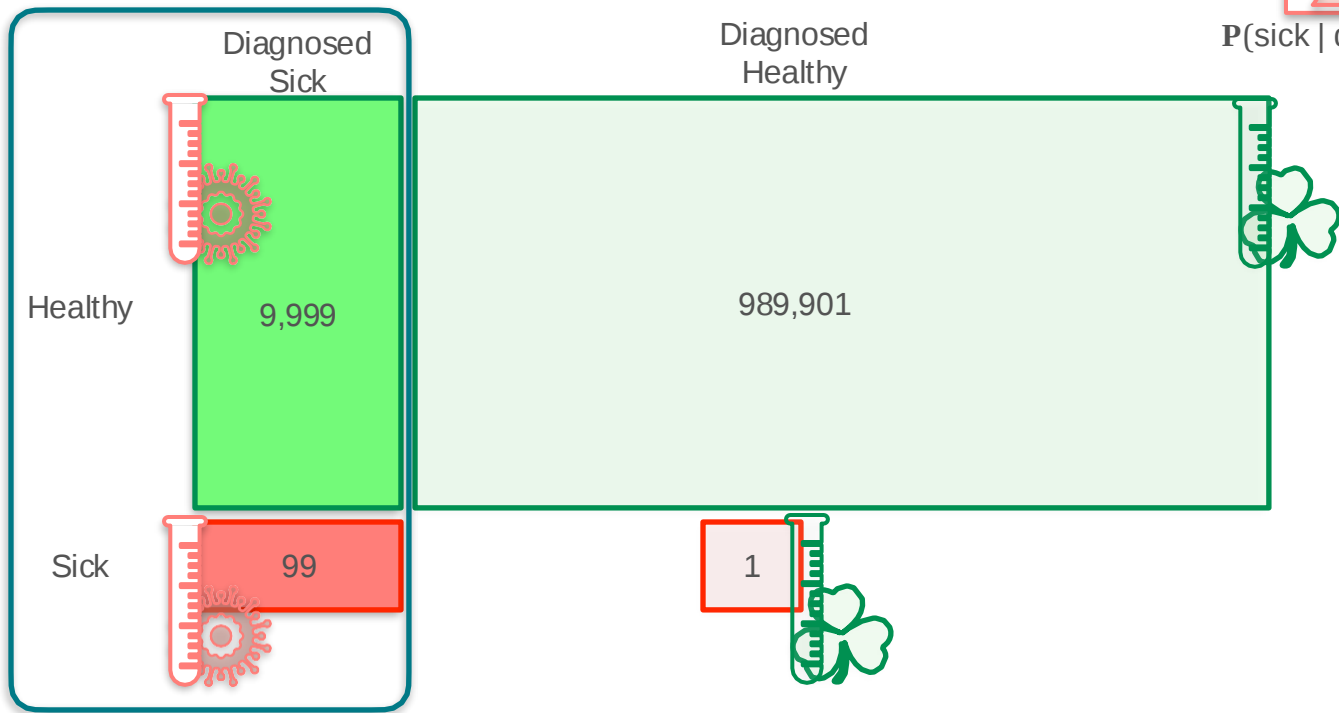
$$P(\text{hasta} \mid \text{hasta teşhis edildi}) = \text{_____}$$

1,000,000 insan

Bayes Teoremi: Sezgisel

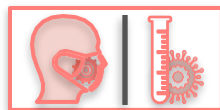
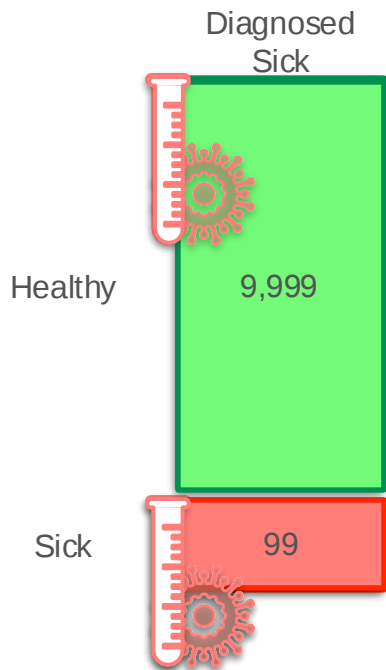


$P(\text{sick} \mid \text{diagnosed sick}) = \text{_____}$

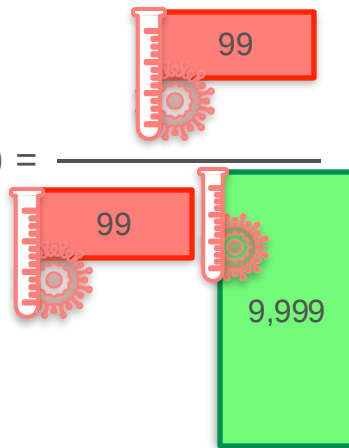


1,000,000 insan

Bayes Teoremi: Sezgisel



$P(\text{sick} \mid \text{diagnosed sick}) =$

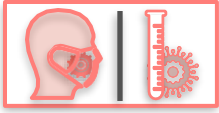


$$= \frac{99}{99 + 9999}$$

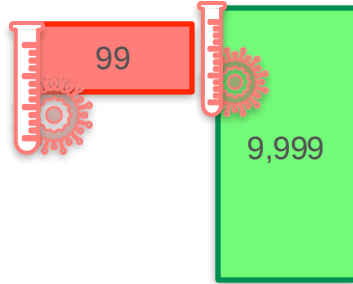
$$= \frac{99}{10098} = 0.0098$$

$= \frac{\text{sick and diagnosed sick}}{\text{sick and diagnosed sick} + \text{healthy and diagnosed sick}}$

Bayes Teoremi: Sezgisel



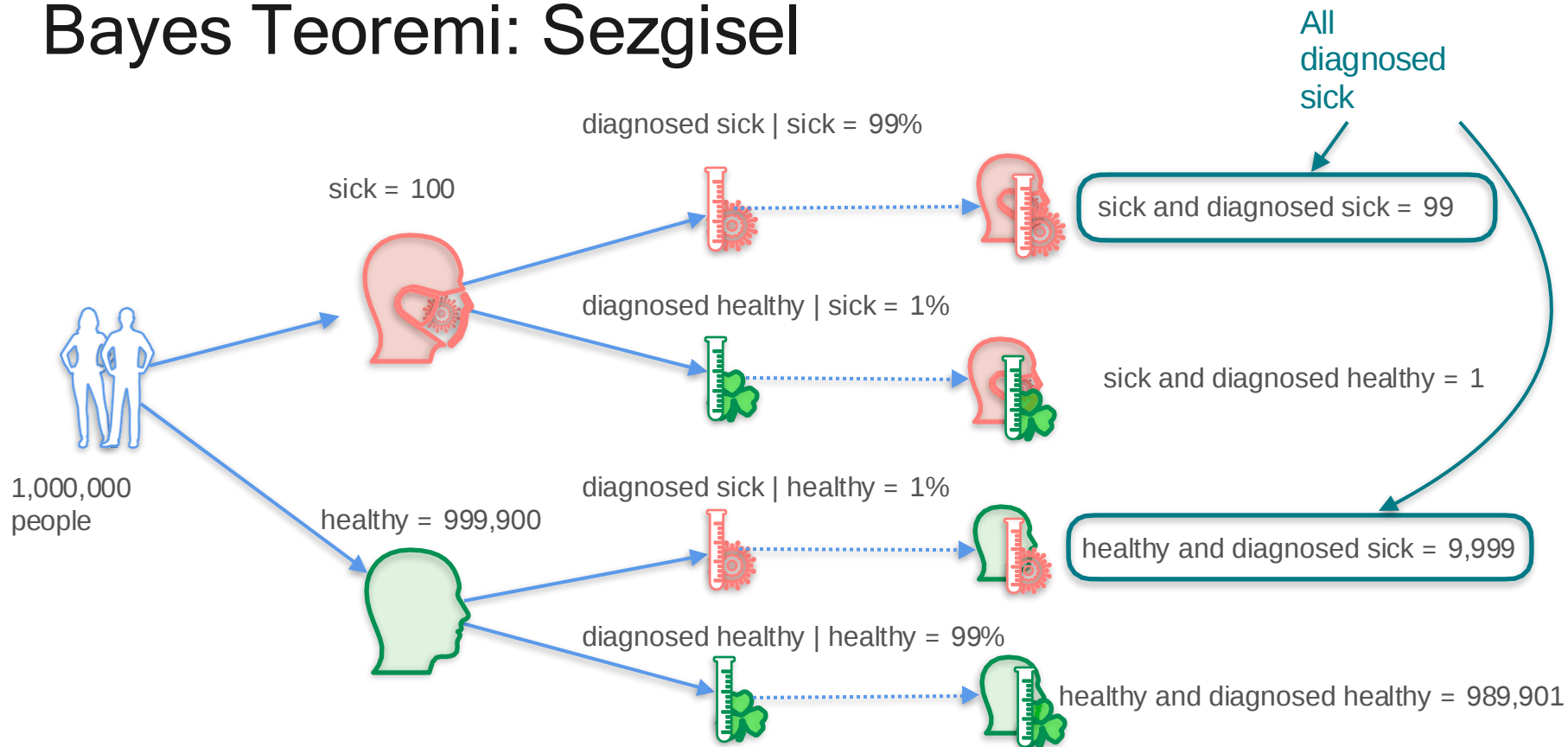
$$P(\text{sick} \mid \text{diagnosed sick}) = \frac{\text{99}}{\text{99} + \text{9,999}}$$



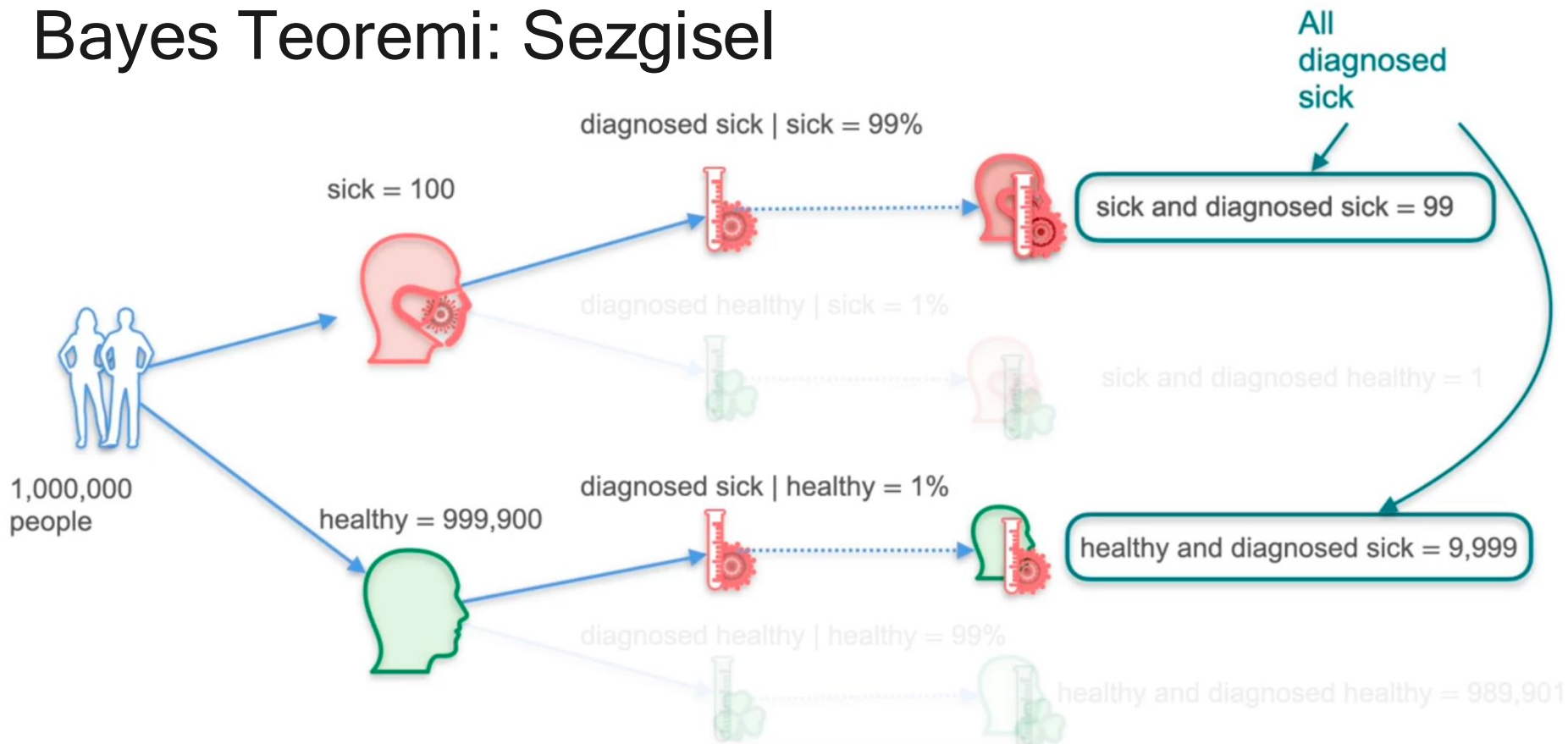
$$= \frac{\text{sick and diagnosed sick}}{\text{sick and diagnosed sick} + \text{healthy and diagnosed sick}}$$

$$= \frac{\text{sick and diagnosed sick}}{\text{everyone diagnosed sick}}$$

Bayes Teoremi: Sezgisel



Bayes Teoremi: Sezgisel



Bayes Teoremi: Sezgisel

$$P(\text{sick} \mid \text{diagnosed sick}) = \frac{\text{Icon of a red head with a red test tube and gear}}{\text{Icon of a red head with a red test tube and gear} + \text{Icon of a green head with a red test tube and gear}}$$

$$P(\text{sick} \mid \text{diagnosed sick}) = \frac{\text{sick and diagnosed sick} = 99}{\text{healthy and diagnosed sick} = 9,999 + \text{sick and diagnosed sick} = 99}$$

$$P(\text{sick} \mid \text{diagnosed sick}) = \frac{99}{10098} = 0.0098$$