Hafta 7
Genel Tekrar & Soru Çözümü

Özet (Genel Olasılık Kavramı)

2.1.3. Ayrık Olay

İki olay aynı anda meydana gelmiyorsa bu olaylara *ayrık olay* denir. Yani $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir. Mesela madeni para atıldığında yazı ve tura gelme olasılığı, futbol karşılaşmasında A takımının kazanması, kaybetmesi ya da berabere kalması sonuçları, bir öğrencinin dersten geçmesi ya da kalması olayları aynı anda gerçekleşmeyeceğinden bu olaylar ayrık olaylardır.

Örnek 2.1. Bir zarın atılması olayında A olayı zarın çift sayı gelmesini ve B olayı zarın tek sayı gelmesi durumunda A ve B olayları ayrık olaylar mıdır?

Çözüm: Örnek uzayı $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ise $A = \{2, 4, 6\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ olur.

$A \cap B = \emptyset$ olduğu için A ile B ayrık olaylardır.

2.1.4. Ayrık Olmayan Olay

İki olay aynı anda meydana geliyorsa bu olaylara *ayrık olmayan olay* denir. Mesela bir zar atıldığında tek sayı ve asal sayı gelmesi, bir öğrencinin hem erkek hem de sarışın olması durumu ayrık olmayan olaylardır.

Örneğin bir madeni paranın üç kez atılması olayı üzerinde A olayı paranın bir kez yazı gelmesi, B olayı paranın en az bir kez yazı gelmesi, C olayı paranın tura gelmemesi, D olayı en az iki yazı gelmesinde ayrık ve ayrık olmayan olayları belirleyelim.

Toplam hal sayısı (mümkün hallerin sayısı) : $2^3 = 8$ bulunur.

Örnek uzayı S = {YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT}

A olayı paranın bir kez yazı gelmesiydi,

A = {YTT, TYT, TTY}

B olayı paranın en az bir kez yazı gelmesiydi,

B = {YTT, TYT, TTY, TTT}

C olayı paranın tura gelmemesiydi,

C = {YYY}

D olayı paranın en az iki yazı gelmesiydi,

D = {YYT, YTY, YYT, YYY} şeklinde tanımlanır.

Yukardaki sonuçlara göre,

A ve B olayları ayrık değillerdir.

A ve C olayları ayrık olaylardır.

A ve D olayları ayrık değillerdir.

B ve C olayları ayrık olaylardır.

B ve D olayları ayrık değillerdir.

C ve D olayları ayrık olaylardır.

Örnek 2.2. Bir zarın atılması olayında A olayı üste gelen sayının asal sayı olması ve B olayı ise üste gelen sayının tek sayı olması olayları ayrık olaylar mıdır?

Çözüm: Örnek uzayı $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se $A = \{2, 3, 5\}$ ve $B = \{1, 3, 5\}$ olur.

$A \cap B = \{3, 5\}$ olduğu için A ile B ayrık olaylar değildir.

2.2. Bir Olayın Olasılığı

Olasılık üzerinde durulan (ya da gerçekleşmesi mümkün) bir olayın meydana gelme şansını ortaya koyar ve P ile gösterilir. Bir basit olay E_i ile gösterilirse bu olayın olasılığı $P(E_i)$, bir bileşik olayın ise A ile gösterilirse bu olayın olasılığı $P(A)$ ile gösterilir.

Olasılığın temel iki özelliği şunlardır:

Bunlardan birincisi ister basit ister bileşik olay olsun bir olayın olasılığı sıfır ile bir arasında değerler alır.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Burada olasılığın 0 olması ilgilenilen olayın gerçekleşmediği, olayın 1 olması ise olayın kesinlikle gerçekleştiğini ifade etmektedir.

Olasılığın temel özelliklerinden ikincisi ise bir basit olayların olasılıkları toplamı her zaman 1'e eşittir.

$$\sum P(E_i) = 1$$

Bir paranın bir kez atılması olayında;

$$P(T) + P(Y) = 1$$

Futbol müsabakalarında iki takımının karşılaşması sonucunda orta çıkacak durumlar için;

$P(\text{Galibiyet}) + P(\text{Mağlubiyet}) + P(\text{Beraberlik}) = 1$ şeklinde ifade edilir.

2.2.1. Olasılıkta Çarpma ve Toplama

2.2.1.1. Bağımlı Olaylarda Çarpma Kuralı

İki olaydan biri diğerine bağlı olarak gerçekleşiyorsa bu olaylara *bağımlı olaylar* denir. Bir B olayının gerçekleşmesi A olayına bağlı olması olasılığı,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $P(\mathrm{B|A})$ ifadesi B olayının A olayına bağlı koşullu olasılığını ifade etmektedir. Yani $P(\mathrm{A|B}) \neq P(\mathrm{A})$ ve $P(\mathrm{B|A}) \neq P(\mathrm{B})$ olur.

Örnek 2.3. Bir fabrikada üretilen ürünlerin 4'ü kusurlu ve 16'sı kusursuzdur. Üretimden rastgele iki ürün seçildiğinde iki biletin de kusurlu olması olasılığını bulunuz?

Çözüm: $$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}).\,P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \left(\frac{4}{20}\right)\left(\frac{3}{19}\right) = 0.0316$$

2.2.1.2. Bağımsız Olaylarda Çarpma Kuralı

İki olaydan biri diğerine bağlı olarak gerçekleşmiyorsa bu olaylara *bağımsız olaylar* denir. Bir A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı olmama olasılığı bu olayların basit olasılıklarının çarpımına eşit olup, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.4. Bir mühendis çalıştığı devre üzerinde kondansatörleri paralel bağlama olasılığı 0.7 ve seri bağlama olasılığı ise 0.3 olarak tahmin etmiştir. Bu devrede her iki bağlamaya da yer verme olasılığını bulunuz?

Çözüm: $P(A \cap B) = P(A).\,P(B) = (0.7)(0.3) = 0.21$

2.2.1.3. Ayrık Olaylarda Toplama Kuralı

İki olay aynı anda meydana gelmiyorsa bu olaylar *ayrık olay* olarak tanımlanmıştı. Bir A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı olmama olasılığı bu olayların basit olasılıklarının toplamına eşit olup, $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.5. Bir zarın bir kez atılması deneyinde 3 veya 6 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6}$

2.2.1.4. Ayrık Olmayan Olaylarda Toplama Kuralı

İki olay aynı anda meydana geliyorsa bu olaylar *ayrık olmayan olay* olarak tanımlanmıştı. Bir A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı olma olasılığı, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.6. Bir öğrencinin Matematik dersinden başarılı olması olasılığı 0.70 ve Olasılık dersinden başarılı olması olasılığı 0.60 tir. Bu öğrencinin Matematik veya Olasılık dersinden başarılı olması olasılığını bulunuz?

Çözüm: Bu öğrencinin her iki sınavdan başarılı olması olasılığı olayların birbirinden bağımsız olduğunu göstermekte olup,

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B}) = (0.70)(0.60) = 0.42$$

şeklinde hesaplanır. Buradan,

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (0.70) + (0.60) - (0.42) = 0.88$$

Not: Ayrık olaylarla, bağımsız olaylar aynı değildir. Ayrık olayların ortak noktası yoktur.

$A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cap B) = 0$'dır. A ve B ayrık olaylardır.

Şayet $P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ ise $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ise A ve B olayları bağımsızdır.

$P(A).P(B) \neq 0$ olduğundan A ve B olayları bağımsız değillerdir.

2.2.2. Olasılık Hesabı İçin Yaklaşımlar

Olasılık hesaplanması konusunda üç tür yaklaşım bulunmaktadır. Bu yaklaşımlar klasik olasılık yaklaşım, deneysel (oransal frekans) olasılık yaklaşım ve subjektif (öznel) olasılık yaklaşımdır.

2.2.2.1. Klasik Olasılık Yaklaşım

Bu yaklaşım bir deney n kez tekrarlandığında sonuçların her birinin eşit olasılığa sahip olduğu durumda kullanılan bir olasılık türüdür. Daha önce basit olayı E_i ile göstermiş olup bu yaklaşıma göre bir *basit olayın* olasılığı $P(E_i)$,

$$P(\mathrm{E_i}) = \frac{1}{\text{Toplam hal sayısı (Mümkün hallerin sayısı)}}$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer bu durum A ile gösterilen bir *bileşik olay* ise bu olayın olasılığı P(A),

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{A olayındaki (ilgilenilen) hal sayısı}}{\text{Toplam hal sayısı (Mümkün hallerin sayısı)}} = \frac{m}{n}$$

Örnek 2.7. Bir paranın bir kez atılması deneyinde yazı gelme olasılığı nedir?

$$P(\mathrm{E_i}) = \frac{1}{\text{Toplam hal sayısı (Mümkün hallerin sayısı)}} = \frac{1}{2}$$

Örnek 2.8. Bir zarın bir kez atılması deneyinde (olayında),

a. Herhangi bir sayının üste gelmesi olasılığını bulunuz?

b. Üst yüze gelen sayının çift sayı gelmesi olasılığını bulunuz?

c. Üst yüze gelen sayının en az 4 gelmesi olasılığını bulunuz?

Çözüm: Bu bölümün başında örnek uzayındaki mümkün hallerin (sonuçların) sayısı k^n olarak hesaplandığı belirtilmiş ve k deney (olay) bir kez yapıldığında mümkün hal sayısı, n deneyin tekrar sayısı olarak ifade edilmişti.

Örnek uzayı S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} için k = 6 ve n = 1 ise $k^n = 6^1 = 6$ olur.

a. Bu deney basit olaydır.

$$P(\mathrm{E}_1) = \frac{1}{6^1} = 6$$

b. A olayı sayının çift sayı olması olarak gösterilirse bu olay için örnek uzayı, A = {2, 4, 6} olur.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3}{6}$$

c. B olayı sayının en az 3 gelmesi olarak gösterilirse bu olay için örnek uzayı, B={3, 4, 5, 6} olur.

$$P(\mathrm{B}) = \frac{4}{6}$$

Örnek 2.9. Bir madeni paranın 3 kez atılması deneyinde,

a. Yazı gelmemesi olasılığını bulunuz?

b. En az bir yazı gelmesi olasılığını bulunuz?

c. İki kez yazı gelmesi olasılığını bulunuz?

d. En fazla bir yazı gelmesi olasılığını bulunuz?

Çözüm: Örnek uzayı S = {YYY, YYT, YTY, YTT, TTT, TTY, TYT, TYY} için k =2 ve n = 3 ise $k^n = 2^3 = 8$ olur.

a. $E_1 = \{TTT\}$

$$P(E_1) = \frac{1}{8} = 8$$

b. A olayı en az bir yazı gelmesi olarak gösterilirse,

A = { YYY, YYT, YTY, YTT, TTY, TYT, TYY}

$$P(A) = \frac{7}{8} \text{ ya da } P(A) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c. B olayı iki kez yazı gelmesi olarak gösterilirse,

B = {YYT, YTY, TYY}

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

d. C olayı en fazla bir yazı gelmesi olarak gösterilirse,

C = {YTT, TYT, TTY, TTT}

$$P(C) = \frac{4}{8}$$

2.2.2.2. Deneysel (Oransal Frekans) Olasılık Yaklaşım

Bu yaklaşım deney sonuçlarının eşit olasılıklı olmadığı durumlarda elde edilecek sonucun olasılığının bulunması durumunda kullanılan bir olasılık türüdür. Yani bir deney n kez tekrarlanmış bir A olayı f kez gerçekleşirse bu durum A olayının *deneysel olasılığı* denir.

$$P(A) = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{n}}$$

şeklinde ifade edilir. Mesela hileli bir madeni paranın atılması olayında yazı gelmesi olasılığı, hileli bir zarın atılması olayında 6 gelmesi olasılığı, bir ürünün kusurlu olması olasılığı, Rastgele seçilen bir ampulün ömrünün 1000 saatten fazla olması örnek olarak verilebilir.

Bu deneylerdeki sonuçlar eşit olasılıklı olmadığı için örnek verilen deneylere ilişkin olasılıklar klasik yaklaşımla hesaplanamaz. Burada sonuçları eşit olasılıklı olmayan deneylerde deney çok kez tekrarlanarak veri üretilir.

Örnek 2.10. Bir fabrikada üretilen ürünlerden rastgele 100 tane alınmış ve 5 tanesinin kusurlu olduğu görülmüştür. Üretilen ilk ürünün kusurlu olması olasılığını bulunuz?

Çözüm: A olayı ürünün kusurlu olması

$$P(A) = \frac{f}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

Örnek 2.11. Hileli bir zar 50 kez atılmış ve sonuçlar aşağıdaki verilmiştir.

Sonuç	Frekans	Sonuç	Frekans
1	5	4	20
2	10	5	25
3	15	6	25
		Toplam	100

Bu hileli zar için üst yüze gelebilecek sayıların her birinin olasılıklarını bulunuz?

Çözüm: $P(1) = \frac{5}{100}, P(2) = \frac{10}{100}, P(3) = \frac{15}{100}, P(4) = \frac{20}{100},$

$P(5) = \frac{25}{100}, P(6) = \frac{25}{100}$

2.2.2.3. Subjektif (Öznel) Olasılık Yaklaşım

Bu yaklaşım deney sonuçlarının olasılıklarının eşit olmadığı ve deneyin (olayın) bir kez meydana geldiği durumlarda elde edilecek sonucun olasılığının bulunmasına *subjektif (öznel) olasılık* denir. Bu yaklaşımda kişinin görüşlerine ya da deneyin gerçekleştiği ortama dayanılarak olasılık belirlenir. Bu yönüyle subjektif olasılığın kişiden kişiye farklılık göstermesi nedeniyle yaklaşımın zayıf yönünü oluşturmaktadır. Mesela kışın dondurma yemeği isteyenlerin tahmini, bir öğrencinin ilk girdiği sınavdan 70 puan alması olasılığı, dünya da yeni bir savaş çıkması olasılığı örnek olarak verilebilir.

2.2.3. Olasılık Aksiyomları

Olasılığın sağlanması için gerekli olan bazı aksiyomlar (yani tanımlanabilmesi için şart olan özellikler) vardır. Bazı aksiyomlar aşağıda ifade edilmiştir.

1. A ve B, bir S örnek uzayında $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ olan iki olay ise

$P(\mathrm{A}) \leq P(\mathrm{B})$'dir.

2. $P(\emptyset) = 0$'dır.

3. Herhangi bir $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}$ olayı için $P(\mathrm{A}) \leq 1$'dir.

4. A bir S örnek uzayında herhangi bir olay olsun. Bu durumda

$P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$'dir.

5. A ve B, S örnek uzayında iki ayrık olay ise

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$

6. A ve B, S örnek uzayında iki olay ise

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

2.2.4. Marjinal (Bileşen) ve Koşullu Olasılıklar

Marjinal olasılık birden fazla olayın gerçekleştiği bir durumda diğer olaylar dikkate alınmayıp sadece bir olay için bulunan olasılığa *marjinal olasılık* denir. Bir A olayının marjinal olasılığı $P(A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.12. 200 öğrencinin cinsiyet ve istatistik dersindeki başarı durumlarına göre dağılımı aşağıda verilmiştir.

	Başarı durumu		
Cinsiyet	Başarılı	Başarısız	Toplam
Erkek	30	50	80
Kadın	80	40	120
Toplam	110	90	200

a. Rastgele seçilen bir erkek öğrencinin marjinal olasılığını bulunuz?

b. Rastgele seçilen bir kadın öğrencinin marjinal olasılığını bulunuz?

c. Rastgele seçilen bir öğrencinin başarılı olmasının marjinal olasılığını bulunuz?

d. Rastgele seçilen bir öğrencinin başarısız olmasının marjinal olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a. Erkek öğrencinin bulunduğu satırın toplamının, toplam öğrenci sayısına bölümü marjinal olasılığı verir.

$$P(\text{Erkek}) = \frac{\text{Erkeklerin sayısı}}{\text{Tüm öğrencilerin sayısı}} = \frac{80}{200}$$

b. $P(\text{Kadın}) = \frac{120}{200}$

c. $P(\text{Başarılı}) = \frac{110}{200}$

d. $P(\text{Başarısız}) = \frac{90}{200}$

Koşullu olasılık bir olayın gerçekleşmesi diğer bir olayın gerçekleşmesine bağlı ise bu olasılığa *koşullu olasılık* denir. A ve B iki olay olmak üzere A olayının koşullu olasılığı $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ ile gösterilir. Burada $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ ifadesi A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığını ifade etmektedir. Yani $P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})$ ve $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ olur.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.12'nin verileri kullanarak bazı koşullu olasılıklar,

Rastgele seçilen bir erkek öğrencinin başarılı olması olasılığı,

$$P(\text{Başarılı}|\text{Erkek}) = \frac{\text{Başarılı olan erkek sayısı}}{\text{Toplam erkek sayısı}} = \frac{30}{80} \text{ ya da } \frac{30/200}{80/200} = \frac{30}{80}$$

Rastgele seçilen bir kadın öğrencinin başarılı olması olasılığı,

$$P(\text{Başarılı}|\text{Kadın}) = \frac{80}{120}$$

Rastgele seçilen bir erkek öğrencinin başarısız olması olasılığı,

$$P(\text{Başarısız}|\text{Erkek}) = \frac{50}{80}$$

bulunur.

Örnek 2.13. İki zarın birlikte atılması olayında toplamların 5 olduğu bilindiğine göre zarlardan birinin üç olması olasılığını bulunuz?

Çözüm: A = Zarlardan birinin 3 olması, B = Toplamın 5 olması olayı

Örnek uzayı $S = k^n = 6^2 = 36$ bulunur.

$A = \{(1,3)(2,3)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)(3,1)(3,2)(4,3)(5,3)(6,3)\}$ ve

$B = \{(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)\}$ ise

$A \cap B = \{(2,3)(3,2)\}$ olduğuna göre,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{4/36} = \frac{1}{2}$$

2.2.5. Olayların Bağımsızlığı

Bir olayda (deneyde) kontrol edilebilen değişken yani değiştirilebilen değişkene *bağımsız değişken* denir. A ve B gibi iki olaydan biri diğerine bağlı olarak gerçekleşmiyorsa yani bir olayın gerçekleşmesi diğerini etkilemiyorsa bu durumda A ve B olaylarının bağımsız olduğu söylenir.

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B})$$

şeklinde ifade edilir. Bir zar ve bir para atılması olayları, bir kutudan çekilen bilye geri atılmak üzere arka arkaya seçilen bilyelerin birincinin mavi ikincinin beyaz gelme olayları bağımsız olaylardır.

Örnek 2.14. İki madeni para birlikte atılması olayında ilk paranın yazı gelmesi ikinci paranın tura geldiği bilindiğine göre bu olaylar bağımsız mıdır?

Çözüm: Örnek uzayı $S = 2^2 = 4$ ise gelebilecek mümkün haller $S = \{YY, YT, TT, TY\}$

A = İlk paranın yazı gelmesi olayı ise A = {YY, YT}

B = İkinci paranın tura gelmesi olayı ise B = {YT, TT}

$$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}, P(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \; ve \; P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4} \; ise$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B}) = \frac{1}{4}$$

olduğundan A ve B olayları bağımsızdır.

2.2.6. Toplam Olasılık Kuralı

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ birbirini engelleyen (bağdaşmaz) olaylar ve S örnek uzayının alt kümeleri olsun. B olayı ise S örnek uzayında tanımlanan ve $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ olaylarının kesişiminden oluşan bir olay olsun.

$$B = S \cap B$$

$$B = (A_1 U A_2 U \ldots U A_n) \cap B$$

$$B = (B \cap A_1)\ U\ (B \cap A_2)\ U \ldots\ U\ (B \cap A_n)$$

ifade edilirken, toplama kuralına göre,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

yazılabilir. Çarpma kuralına göre ise,

$$P(B) = P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n).P(B \mid A_n)$$

yazılabilir. Buradan

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i)$$

şeklinde yazılır ve bu eşitliğe *toplam olasılık (bileşik olasılık)* denir.

Örnek 2.16. Aynı marka aracın üç farklı yakıt türüne göre kat ettiği yol ve motorun vermiş olduğu arıza oranları belirli bir mesafede incelenmiştir. Buna göre benzinli araç yolun %60'nı, dizel araç yolun %30'nu ve sıvılaştırılmış petrol gazı (LPG) ile %10'ununu gittiği gözlenmiştir. Motor arıza oranları ise %2 benzinli araç, %3 dizel araç ve %5 sıvılaştırılmış petrol gazı olduğu belirlenmiştir. Buna göre bu araçlardan rastgele alan bir müşterinin arızalı olma olasılığını bulunuz?

Çözüm: A_i = {Seçilen araç i.'nci yakıt türüne aittir}

B = {Seçilen araç arızalıdır}

Verilen oranların olasılıkları ise,

$P(A_1)=0.60$, $P(A_2)=0.30$, $P(A_3)=0.10$, $P(B \mid A_1)=0.02$, $P(B \mid A_2)=0.03$, $P(B \mid A_3)=0.05$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

$$= P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + P(A_3).P(B \mid A_3)$$

$$= 0.60(0.02) + 0.30(0.03) + 0.10(0.05)$$

$$= 0.026$$

Rastgele seçilen bir aracın arızalı olması olasılığı 0.026 yani %2.6'dir.

2.2.7. Bayes Teoremi

Çeşitli nedenlerin aynı sonucu verebildiği durumlarda, bilinen bir sonucu hangi olasılıkla ve hangi nedenden ortaya çıktığını belirlemek amacıyla kullanılan teoremdir. B_1, B_2, …, B_n olayları bir S örnek uzayının bir parçalanışı ve A'da ($P(\mathrm{A})\neq 0$) S örnek uzayı ile ilgili bir olay ise koşullu olasılığın tanımından,

$$P(\mathrm{B_i}|\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A}|\mathrm{B_i})\mathrm{P}(\mathrm{B_i})}{\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} P(\mathrm{A}|\,\mathrm{B_i})P(\mathrm{B_i})}$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 2.17. Bir fabrikada çalışan mühendis üretimde kusurlu sayısını doğru tespit etmek istemektedir. Aynı ürünün üretildiği üç farklı makinada ürünlerin %50'si I. makinada, %30'u ikinci makinada ve %20'si ise III. makinada üretilmektedir. Bu makinalardan üretilen ürünlerin kusurlu oranlarının %1'inin I. makinada, %4'ünün II. makinada ve %2'sinin ise III. makinada üretildiği belirlenmiştir. Bu üretimden rastgele seçilen biri ürünün kusurlu olduğu görüldüğüne göre kusurlu ürünün I. makinada üretilme olasılığı nedir?

Çözüm: K : Kusurlu bir parça çekilme olasılığı,

$P(\mathrm{I})$: Kusurlu ya da kusursuz, herhangi bir parçanın I. makinada üretilme olasılığı = 0.50

$P(\mathrm{II})$: Kusurlu ya da kusursuz, herhangi bir parçanın II. makinada üretilme olasılığı = 0.30

$P(\mathrm{III})$: Kusurlu ya da kusursuz, herhangi bir parçanın III. makinada üretilme olasılığı = 0.20

$P(\mathrm{K|I})$: I makinada kusurlu ürün üretilme olasılığı = 0.01

$P(\mathrm{K|II})$: II makinada kusurlu ürün üretilme olasılığı = 0.04

$P(\mathrm{K|III})$: III makinada kusurlu ürün üretilme olasılığı = 0.02

$$P(\mathrm{B_i|A}) = \frac{P(\mathrm{A|B_i})\mathrm{P}(\mathrm{B_i})}{\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} P(\mathrm{A|\ B_i})\mathrm{P}(\mathrm{B_i})} = \frac{P(\mathrm{I})P(\mathrm{K|I})}{P(\mathrm{I})P(\mathrm{K|I}) + P(\mathrm{II})\mathrm{P}(\mathrm{K|II}) + P(\mathrm{III})P(\mathrm{K|III})}$$

$$= \frac{0.50(0.01)}{0.50(0.01) + 0.30(0.04) + 0.20(0.02)}$$

$$\cong 0.238$$

1. Bir firmada aynı bölümden mezun olan 8 kişi başvuruda bulunmuş olup bunlardan 5'i erkek 4'ü kadındır. Başvuranlar arasından rastgele 2 kişi alınacaktır.

a. Her ikisinin erkek,

b. Her ikisinin kadın,

c. Birincisinin erkek ikincisini kadın,

d. Birincisinin kadın ikincisinin erkek olması olasılıkları kaçtır?

Çözüm:

a. $P(EE) = \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{5}{14}$

b. $P(KK) = \left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{14}$

c. $P(EK) = \left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{5}{14}$

d. $P(KE) = \left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{14}$

2. 3 mavi ve 2 beyaz ürün bulunan bir pakette çekilen bir ürünün geri bırakılmak üzere arka arkaya çekilen iki üründen birincisinin mavi ve ikincisinin beyaz olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: Bir paketten çekilen ürün geri bırakılmak üzere arka arkaya seçilen ürünlerin birincisini mavi ikincisinin beyaz gelme olayları bağımsız olaylardır.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{5}.\frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

3. Bir zarla, bir para birlikte atıldığında zarın çift sayı ve paranın yazı gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm: Bu iki olayın meydana gelmesi birbirinden bağımsızdır çünkü zar ve para birbirini etkilememektedir (bağlaç “ve”)

Zarın çift sayı gelme olasılığı $P(\mathrm{A}) = 3/6 = 1/2$

Paranın yazı gelme olasılığı $P(\mathrm{B}) = 1/2$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

4. Piyasaya yeni sürülen iki otomobilden herhangi birinin çalışmama olasılığı 0.03 ise test sürüşü sırasında her iki otomobilin de çalışmaması olasılığı kaçtır?

Çözüm: Bu iki otomobil birbirinden bağımsızdır. Çünkü test sürüşü esnasında birinin çalışmaması diğerinin etkilemememektedir.

A = İlk otomobilin çalışmaması

B = İkinci otomobilin çalışmaması

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}).P(\mathrm{B}) = (0.03).(0.03) = 0.0009$

5. İki zarın bir kez atılışında toplamının 7 ya da 11 gelmesi olasılığı kaçtır?

Çözüm:

A: Toplamın 7 olması olayı {(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)}

B: Toplamın 10 olması olayı {(5,6) (6,5)}

A ve B ayrık olaylar olduğundan,

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

6. Bir mühendis yapmış olduğu iki iş başvurusundan, A firmasından çağrılma olasılığı %70, B firmasından çağrılma olasılığı %60 olarak düşünmektedir. Her iki firmadan görüşmeye çağrılma olasılığı ise %50'dir. Buna göre en az bir şirketten çağrılma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$$

7. Hileli bir zar atıldığında üst yüze gelen sayıların olasılığı,

$P(1) = 0,\ P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/5$

olduğuna göre, zarın 5'ten küçük gelme olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$$P[\mathrm{P}(1) \cup \mathrm{P}(2) \cup \mathrm{P}(3) \cup P(4)] = P(1) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4)$$

$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

8. 40 kişilik bir sınıfta 28 erkek öğrenciden 10'u gözlüklüdür. Bu sınıftan seçilen bir öğrencinin kız veya gözlüklü olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: Erkek sayısı 28, Kız sayısı 12, Gözlüklü erkek sayısı 10, Gözlüklü kız sayısı x ise

Sınıftan seçilen bir kişinin kız olma olasılığı $P(\mathrm{K}) = 12/40$,

Gözlüklü öğrenci olma olasılığı $\mathrm{P(G)} = (10 + \mathrm{x}) / 40$ dır.

Seçilen öğrencinin kız veya gözlüklü olma olasılığı $P(K \cap G) = x/40$

O hâlde, seçilen öğrencinin kız veya gözlüklü olma olasılığı;

$$P(K \cup G) = P(K) + P(G) - P(K \cap G) = \frac{12}{40} + \frac{10 + x}{40} - \frac{x}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

9. 12 makine, 24 inşaat mühendisliği öğrencilerinin bulunduğu bir sınıfta bu öğrenciler arasından arka arkaya 2 öğrenci seçildiğinde, seçilen öğrencilerin ikisinin de makine öğrencisi olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{12}{36}.\frac{11}{35} = \frac{11}{105}$$

10. İki zar atıldığında, zarların üst yüzüne aynı sayılar geldiği bilindiğine göre, toplamın 6 olma olasılığı kaçtır?

Çözüm:

A = Üst yüze aynı sayılar gelmesi olayı

B = Zarların toplamının 6 olması olayı

A = {(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)}

B = {(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)}

$A \cap B = \{(3,3)\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6}$$

11. Bir fabrikada üretilen ürünlerden 30'u hatasız ve 20'sinin hatalı olduğu belirlenmiştir. Rastgele iki parça iadesiz olarak seçildiğinde her iki ürünün de hatalı olması olasılığı kaçtır?

Çözüm:

A = İlk seçilen parça hatalıdır.

B = İkinci seçilen parça hatalıdır.

$$P(A) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \; ve \; P(B|A) = \frac{19}{49}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(A).P(B|A) = \frac{2}{5}.\frac{19}{49} = \frac{38}{245}$$

12. Uzaktan eğitim hakkındaki düşünceleri belirlemek amacıyla öğretmen ve öğrencilerden oluşan 500 kişiye düşüncesi sorulmuş, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Statü	Görüşler			Toplam
	Katılıyor	Katılmıyor	Kararsız	
Öğretmen	150	100	50	300
Öğrenci	50	50	100	200
Toplam	200	150	150	500

a. Uzaktan eğitime katılan ve öğretmen olma olasılığı,

b. Bu gruptan rastgele seçilen birinin öğretmen ya da katılıyor olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: A = Seçilen kişi öğretmendir.

B = Seçilen kişi öğrencidir.

a. $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{150}{500} = 0.30$

b. $P(\mathrm{A}) = 300 / 500 = 0.60$

$P(\mathrm{B}) = 200 / 500 = 0.40$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(A).P(B|A) = \frac{300}{500}.\frac{150}{300} = 0.30$$

bulunur. O hâlde istenen olasılık,

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.60 + 0.40 - 0.30 = 0.7$$

14. Bir üniversitede Ekonometri bölümü üçüncü sınıfta 60 öğrenci bulunmaktadır. Bu 60 öğrenci dışında 10 öğrenci dördüncü sınıf olup alttan ders almaktadır. Daha önceki yıllardan üçüncü sınıf öğrencilerinin %60'ı ve dördüncü sınıf öğrencilerinin ise yarısı başarılıdır. Buna göre yılsonunda herhangi bir öğrencinin başarılı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: **A** = Öğrencinin başarılı olması

B = Başarılı olan öğrencinin üçüncü sınıf olması

C = Başarılı olan öğrencinin dördüncü sınıf olması

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(C).P(A|C) = \frac{60}{70}.\frac{60}{100} + \frac{10}{70}.\frac{50}{100} = \frac{41}{70}$$

15. Bir tekstil fabrikasında üretilen malların %45'i birinci makinada, %30'u ikinci makinada ve %25'i üçüncü makinada üretilmektedir. Bu makinaların ürettikleri malların sırasıyla %3, %4 ve %5'inin hatalı olduğu belirlenmiştir.

a. Üretilen ürünlerden rastgele alınan bir ürünün hatalı olma olasılığı kaçtır?

b. Rastgele seçilen bir ürün hatalı olduğu bilindiğine göre bu ürünün ikinci makineden olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: A = Seçilen kumaşın kusurlu olması

B_1 = Ürünün birinci makinada üretilmesi

B_2 = Ürünün ikinci makinada üretilmesi

B_3 = Ürünün üçüncü makinada üretilmesi

a. $P(A) = \sum_{i=1}^{n=3} P(A|B_i).P(B_i)$

$= P(A|B_1).P(B_1) + P(A|B_2).P(B_2) + P(A|B_3).P(B_3)$

$= (0.45).(0.03) + (0.30).(0.04) + (0.25)(0.05) = 0.028$

Bir başka ifadeyle bu fabrikadan 1000 adet ürün alınırsa, bunların 28 tanesinin hatalı olduğu söylenebilir

b. $P(B_2|\mathrm{A}) = \frac{P(A|B_2).P(B_2)}{P(A|B_1).P(B_1)+P(A|B_2).P(B_2)+P(A|B_3).P(B_3)}$

$P(B_2|\mathrm{A}) = \frac{(0.30).(0.04)}{0.028} = 0.429$

Özet (Rastgele Değişkenler)

Rastgele değişkenler, olasılık kavramında önemli bir yere sahiptir. Rastgele değişken değeri bir olay (deney) ya da gözlem sonucunda şansa bağlı ortaya çıkan bir değişkenin aldığı değer olarak tanımlanabilir. Günlük hayat da cümle içerisinde farkında olmadan da kullandığımız bazı kelimeler rastlantı değişkenleri ifade etmektedir. Mesela bir kişinin başarı durumunu konuştuğumuzda, üzerinde durduğumuz olay başarı durumunu ifade ettiğinden bu başarı olayı bizim rastgele değişkenimizi göstermektedir. Yine bir madeni paranın atılması durumunda yazı gelmesi ile ilgileniyorsak bu olayda rastgele değişkenimizin yazı olduğunu söyleyebiliriz. Bir ailedeki çocuk sayısı, Suyun içerisinde bulunan oksijen miktarı, Futbol müsabakasında atılan gol sayısı gibi olaylar rastgele değişkenlere birkaç örnek olarak verilebilir.

3.1. Rastgele Değişkenler

Örneklem uzayı S'de tanımlanan basit bir fonksiyondur. S'de tanımlanan değişkenlerin nitel ya da nicel olarak ifade edilebilir. Ancak S örneklem uzayında yer alan olaya sayısal değerler atayan fonksiyon rastgele değişken olarak tanımlanabilir.

Rastgele değişkenler X, Y, Z, … gibi büyük harflerle gösterilirken rastgele değişkenlerin aldığı değerler de x, y, z, … gibi küçük harflerle gösterilir.

Rastgele değişkenler kesikli (discrete) ve sürekli (continuous) olmak üzere ayrılırlar.

3.1.1. Kesikli Rastgele Değişkenler

Bir rastgele değişkenin alacağı değerler sayılabiliyorsa bu tür rastgele değişkenlere *kesikli rastgele değişkenler* denir. Başka bir ifadeyle bir rastgele değişkenin alabileceği değerlerinin sayısı sonlu ya da sayılabilir sonsuzluktaki değişkenlerdir. Kesikli rastgele değişkenler için aşağıdaki örnekler verilebilir.

- Bir ailedeki çocuk sayısı
- Bir futbol müsabakasında atılan gol sayısı
- Bireylerin ayakkabı numarası
- Bir madeni paranın iki kez atıldığında yazı gelmesi sayısı
- Bir zarın atılması olayında üst yüze gelebilecek sayılar
- Bir raftaki kitap sayısı

3.1.2. Sürekli Rastgele Değişkenler

Bir rastgele değişkenin alacağı değerler ölçüm ya da tartı ile elde edilebiliyorsa bu tür rastgele değişkenlere *sürekli rastgele değişkenler* denir. Başka bir ifadeyle bir rastgele değişkenin alabileceği değerlerinin sayısı bir aralık ya da aralıklar kümesindeki değişkenlerdir. Sürekli rastgele değişkenler için aşağıdaki örnekler verilebilir.

- Bir öğrencinin boy uzunluğu
- Bir atletin bir mesafeyi koşma süresi
- Bir bireyin ağırlığı
- Bir çözelti içerisindeki sodyum yüzdesi
- Bir konutun fiyatı
- Bir otomobilin motor ömrü

3.2. Olasılık Fonksiyonu

S örnek uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme A olduğu varsayılırsa;

$$P : A \rightarrow [0,1] \text{ ya da } P : 0 \leq A \leq 1$$

şeklinde tanımlanır. P fonksiyonuna A üzerinde *olasılık fonksiyonu* denir. Diğer bir ifadeyle $x \in A$ ise $P(x)$ reel sayısına x olayının olasılığı denir. Olasılık fonksiyonları değişkenin türüne göre kesikli olasılık fonksiyonu ve sürekli olasılık fonksiyonu olmak üzere ikiye ayrılır.

3.2.1. Kesikli Olasılık Fonksiyonu

X rastgele değişkeni x_1, x_2, … , x_n değerlerini alabilen kesikli bir rastgele değişken ve bu değerlere karşılık gelen olasılıklar $P(X=x)$ olmak üzere (bu ifade X kesikli rastgele değişkeninin x değerini alma olasılığı şeklinde ifade edilir) aşağıdaki koşulları sağlayan $P(X)$ fonksiyonuna X'in *kesikli olasılık fonksiyonu* (olasılık fonksiyonu) denir.

1. Tanım bölgesi dışında ($x \notin$ R için) $P(x) = 0$'dır.
2. Tanım bölgesi içinde ($x \in$ R için) $0 \le x \le 1$'dir.
3. Tanım bölgesindeki tüm değerler için olasılıklar toplamı 1'dir.

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

Örnek 3.1. Bir madeni paranın bir kez atılması olayında, X rastgele değişkeni tura gelme sayısını göstersin. X'in olasılık fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: Bir madeni para n kez atıldığında örnek uzayının eleman sayısı $S = 2^n$'dir.

Örnek uzayı S = {Y, T} ise X'in alabileceği değerler 0 ve 1 olup, bu değerleri alma olasılıkları,

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \; P(X=1) = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. X'in kesikli olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilir.

$$P(X=x) = \begin{cases} \binom{1}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}, & x = 0,1 \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

veya

X = x	0	1
P(X = x)	1/2	1/2

Örnek 3.2. Bir madeni paranın üç kez atılması olayında, *X* rastgele değişkeni tura gelme sayısını göstersin.

a. *X* rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu oluşturunuz?

b. Bu fonksiyonun olasılık fonksiyonu olduğunu gösteriniz?

Çözüm: Örnek uzayı S = 2^3 =8 bulunur. S = {YYY, TYY, YTY, YYT, TYT, YTT, TTY, TTT} ise *X*'in alabileceği değerler 0, 1, 2, 3 olup bu değerler açık bir şekilde ifade edilecek olursa,

YYY = 0

TYY, YTY, YYT = 1

TYT, YTT, TTY = 2

TTT = 3

olarak yazılır.

a. *X*'in kesikli olasılık fonksiyonu,

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}, x = 0,1,2,3 \\ 0\,, d.d \end{cases}$$

veya

X = x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

şeklinde ifade edilir.

b. Bu değerlerin olasılıkları,

$$P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{3}{8}, P(X=2)=\frac{3}{8}, P(X=3)=\frac{1}{8}$$

bulunur.

Kesikli olasılık fonksiyonun koşulu dikkate alınırsa;

$0 \leq x \leq 1$ ve $\sum_{x=0}^{n=3} P(x) = 1$ olması gerekir. Bu koşulları sağladığından P(x) kesikli olasılık fonksiyonudur.

Örnek 3.3. Hileli bir madeni para üç kez atılması olayında, tura gelme olasılığı 2/5, yazı gelme olasılığı 3/5 olduğuna göre ve X rastgele değişkeni tura gelme sayısını göstersin.

a. X'in olasılık fonksiyonunu bulunuz?

b. En az birinin tura gelmesi olasılığını bulunuz?

Çözüm: Örnek uzayı S = 2^3 =8 bulunur. S = {YYY, TYY, YTY, YYT, TYT, YTT, TTY, TTT} ise X'in alabileceği değerler 0, 1, 2, 3'tür.

a. S örnek uzayı eşit olasılıklı bir uzay değildir çünkü soruda tura ve yazı gelme olasılıkları verilmiştir. Ayrıntılı şekilde S'deki olasılıklar verilecek olursa,

$$P(YYY) = \frac{3}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5} = \frac{27}{125}, P(TYY) = \frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{3}{5} = \frac{18}{125},$$

$$P(YTY) = \frac{18}{125}, P(YYT) = \frac{18}{125}$$

$$P(TYT) = \frac{12}{125}, P(YTT) = \frac{12}{125}, P(TTY) = \frac{12}{125}, P(TTT) = \frac{8}{125}$$

Örnek uzayı S eşit olasılıklı olmadığından olasılık fonksiyonu X'in tura gelme olasılığı,

$$P(X=0)=P(YYY)=\frac{27}{125}$$

$$P(X=1)=P(TYY,YTY,YYT)=\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{54}{125}$$

$$P(X=2)=P(TYT,YTT,TTY)=\frac{12}{125}+\frac{12}{125}+\frac{12}{125}=\frac{36}{125}$$

$$P(X=3)=P(TTT)=\frac{8}{125}$$

b. $P(X\geq 1)$ olasılığı soruluyor,

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$=\frac{54}{125}+\frac{36}{125}+\frac{8}{125}=\frac{98}{125}$$

Örnek 3.4. İki zarın birlikte atılması olayında, X rastgele değişkeni üst yüze gelen sayıların toplamının 7 olmasını göstersin. X'in olasılığı ve olasılık fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: Bir zar n kez atıldığında örnek uzayının eleman sayısı $S = 6^n$'dir.

Örnek uzayı S = 6^2 =36 bulunur.

X= {(1,6) (2,5) (3,4) (6,1) (5,2) (4,3)} ise X'in olasılığı,

$$P(X) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{6}{36}, x = 1,2,3,4,5,6 \\ \quad 0, d.d \end{cases}$$

Örnek 3.5. Bir futbolcunun bir maçta attığı gol sayısını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2-x)\ , & x = 1,2,3 \\ \frac{1}{5}x\ , & x = 4,5 \\ 0\ , & d.d \end{cases}$$

a. Bu olasılık fonksiyonunu kullanarak futbolcunun 5 gol atma olasılığını bulunuz?

b. Futbolcunun 1-4 arası gol atması (1 ve 4 dahil) olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a. $P(X = 5) = \frac{1}{5}.(5) = 1$

b. $P(1 \leq x \leq 4) = P(1 \leq x \leq 3) + P(3 < x \leq 4)$

$$= \sum_{x=1}^{3} \frac{1}{5}(2-x) + \sum_{x=4}^{4} \frac{1}{5}x$$

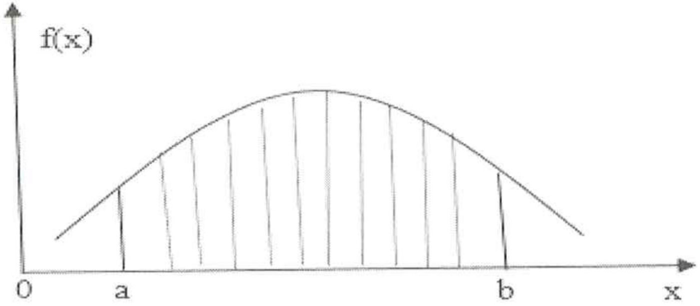
$$= \frac{1}{5}[(2-1) + (2-2) + (2-3)] + \frac{1}{5}(4) = 0.8$$

3.2.2. Sürekli Olasılık Fonksiyonu

X rastgele değişkeni x_1, x_2, … , x_n değerlerini alabilen sürekli bir rastgele değişken ve bu değerlere karşılık gelen olasılıklar daima bir aralık ya da aralıklara atanır. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X'in *sürekli olasılık fonksiyonu* (olasılık yoğunluk fonksiyonu, kısaca o.y.f) denir.

1. $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$f(x)$ fonksiyonu yukarıdaki koşulları sağlıyorsa X sürekli rastgele değişkeninin a ve b arasında bulunması olasılığı $P(a < x < b)$ aşağıda belirtilen taralı alandır.



Sürekli X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ den yararlanılarak $P(X \geq a)$ ve $P(a \leq X \leq b)$ olasılıkları aşağıdaki gibi bulunur:

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$P(X \geq a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Sürekli X rastgele değişkeninin tanım aralığı $(-\infty, \infty)$ arasında değiştiği için aşağıda belirtilen durumlarda sınır değerlerinin dâhil olması ya da olmaması olasılıkları değiştirmez.

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

Ayrıca

$$P(a \leq X \leq b) = F(a) - F(b)$$

ilişkisi vardır.

Örnek 3.6. Bir bebeğin büyüme evresinde aldığı kiloları gösteren X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,, 0 \leq x \leq 1 \\ 0\,, d.d \end{cases}$$

a. $f(x)$ fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu olup olmadığını araştırınız?

b. $f(x)$ fonksiyonun olasılık fonksiyonu ise $P(\mathrm{x} \leq 1/2)$, $P(\mathrm{x} \geq 1/2)$ ve $P(1/3 \leq \mathrm{x} \leq 3/5)$ olasılıklarını bulunuz?

Çözüm:

a. Bu fonksiyon $0 \leq \mathrm{x} \leq 1$ aralığında olduğu için $f(x) \geq 0$ koşulunu sağlamaktadır. Bu fonksiyonun (0,1) aralığında belirli integrali alınırsa,

$$\int_0^1 2x dx = 2(\frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = 2\left[\frac{(1)^2 - (0)^2}{2}\right] = 1$$

olduğuna göre ikinci koşulu da sağladığı görülür. O hâlde $f(x)$'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu söylenebilir.

b. $P\left(x \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} 2x dx = 2(\frac{x^2}{2})\Big|_0^{0.5} = 2\left[\frac{(0.5)^2 - (0)^2}{2}\right] = 0.25$

$$P\left(x \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{0.5}^{1} 2x dx = 2(\frac{x^2}{2})\Big|_{0.5}^{1} = 2\left[\frac{(1)^2 - (0.5)^2}{2}\right] = 0.75$$

$$P\left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{5}\right) = \int_{1/3}^{3/5} 2x dx = 2(\frac{x^2}{2})\Big|_{1/3}^{3/5} = 2\left[\frac{(3/5)^2 - (1/3)^2}{2}\right] \cong 0.249$$

Örnek 3.7. Bir ampulün dayanma süresini gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} kx^4 & ,0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

a. Fonksiyonda verilen k sabitini bulunuz?

b. $P(x \leq 1/2)$ olasılığını bulunuz?

c. $P(1/2 \leq \mathrm{x} \leq 3/2)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ olmalıdır. Yani,

$$\int_0^2 kx^4 dx = 1 \text{ ise } k\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 \Rightarrow k\left(\frac{2^5 - 0^5}{5}\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{5}{32}$$

b. $P(x \leq 1/2) = \int_0^1 \frac{5}{32} x^4 dx = \frac{5}{32}\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{5}{32}\left[\frac{(1)^5 - (0)^5}{5}\right] = \frac{1}{32}$

c. $P(1/2 \leq \text{ x } \leq 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} \frac{5}{32} x^4 dx = \frac{5}{32}\frac{x^5}{5}\Big|_{1/2}^{3/2} = 0.236$

3.2.3. Olasılık Dağılım Fonksiyonu

Dağılım fonksiyonuna kümülatif ya da türev dağılım fonksiyonu da denilmektedir. X, S örneklem uzayında tanımlanmış bir rastgele değişken olmak üzere x değerinden küçük ya da ona eşit bir değer alma olasılığını veren $F(x)$ fonksiyonuna X'in *dağılım fonksiyonu* (kümülatif/birikimli) denir ve $F(x)$ ile gösterilir. X kesikli ya da sürekli bir değişken ise dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \leq x)$ olarak tanımlanır. $F(x)$'in tanım aralığı $[0,1]$ yani $0 \leq x \leq 1$ arasındadır. X kesikli ya da sürekli bir rastgele değişken olması durumunda dağılım fonksiyonu aşağıda tanımlanmıştır.

X kesikli rastgele değişken ise, X'in olasılık dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} P\,(x_i)$$

şeklinde ifade edilir.

X sürekli rastgele değişken ise, X'in olasılık dağılım yoğunluk fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.8. X kesikli rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

X=x	-2	1	2	4
$P(X \leqslant x)$	1/4	1/8	1/2	1/8

X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: X kesikli rastgele değişken olduğundan X'in dağılım fonksiyonu daha önce verilen aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{X \le x} P\,(x_i)$$

$$P(X < -2) = 0$$

$$P(X \le -2) = \frac{1}{4}$$

$$P(X < 1) = P(X = -2) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \le 1) = P(X = -2) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X < 2) = P(X = -2) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X \le 2) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

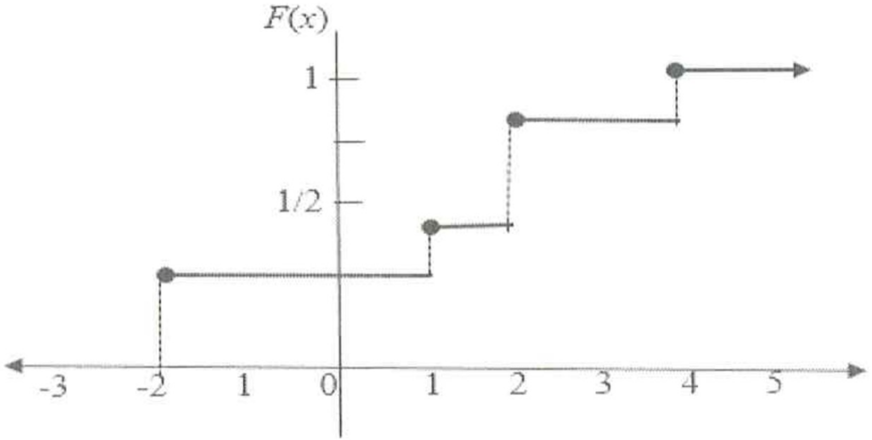
$$P(X < 4) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$P(X \ge 4) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1$$

şeklinde her bir olasılık değerleri bulunur. X rastgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu ve $F(x)$ grafiği aşağıda oluşturulmuştur.

$$F(x) = \begin{cases} 0 , x < -2 \\ 1/4 \; , -2 \leq x < 1 \\ 3/8 \; , 1 \leq x < 2 \\ 7/8 \; , 2 \leq x < 4 \\ 1 , x \geq 4 \end{cases}$$



Örnek 3.9. X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & , \quad 0\leq x\leq 2\\ 0 & , \quad d.d\end{cases}$$

X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz?

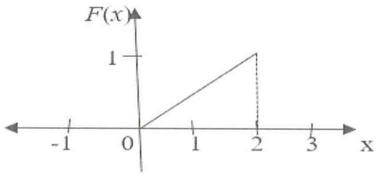
Çözüm: X sürekli rastgele değişken olduğundan X'in dağılım yoğunluk fonksiyonu daha önce verilen aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

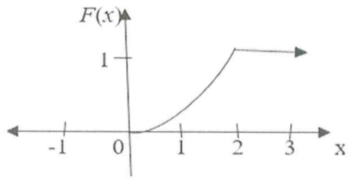
$$F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{2}tdt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x=\frac{1}{2}\left[\frac{(x)^2-(0)^2}{2}\right]=\frac{1}{4}x^2$$

X rastgele değişkeninin olasılık dağılım yoğunluk fonksiyonu ve $F(x)$ grafiği aşağıda oluşturulmuştur.

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \frac{1}{4}x^2, 0\leq x\leq 2\\ 1, x>2\end{cases}$$



Şekil 3.4. *f*'nin grafiği



Şekil 3.5. *F*'nin grafiği

3.2.4. Dağılım Fonksiyonunun Özellikleri

1. Her x değeri $0 \leq F(x) \leq 1$ aralığında değişir. Matematiksel olarak $f(x)$, $F(x)$'in türevidir.

2. Tanım bölgesi $-\infty < x < \infty$ aralığında ve $F(x) = P(X \leq x)$ olduğundan

   $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ dir.

3. $F(x)$, x'in azalmayan bir fonksiyondur. Yani $x_1 < x_2$ ise $F(x_1) < F(x_2)$ dir.

4. $x_1 < x_2$ için $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ olarak hesaplanır.

5. X, kesikli ya da sürekli bir rastgele değişkeni ve $F(x)$ dağılım fonksiyonu ise,

   $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ bulunur.

6. X, sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f) f ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olduğunda,

   $f(x) = \dfrac{d}{dx}.F(x)$ dir.

Örnek 3.10. Bir ilde oynanan futbol karşılaşmasında atılan golleri gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}, x = 1 \\ \frac{1}{3}, x = 2 \\ \frac{4}{9}, x = 3 \end{cases}$$

X'in dağılım fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: Yukarıdaki fonksiyon aşağıdaki şekilde de verilebilir.

X=x	1	2	3
P(X ⩽ x)	2/9	1/3	4/9

X kesikli rastgele değişken olduğundan X'in dağılım fonksiyonu daha önce verilen aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{X \leq x} P\,(x_i)$$

$$P(X < 1) = 0$$

$$P(1 \leq X < 2) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = \frac{2}{9}$$

$$P(2 \leq X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = 1$$

şeklinde her bir olasılık değerleri bulunur. X kesikli rastgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu ve $F(x)$ grafiği aşağıda oluşturulmuştur.

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , x < 1 \\ 2/9\ , 1 \leq x < 2 \\ 5/9\ , 2 \leq x < 3 \\ 1\ , x \geq 3 \end{cases}$$

Örnek 3.11. İki zar atıldığında üste gelen sayıların toplamının asal sayı olduğunu gösteren X rastgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm:

Örnek uzayı, S = {(1,1)(1,2)(1,4)(1,6)(2,1)(2,3)(2,5)(3,2)(3,4)(4,1)(4,3)(5,2)(5,6)(6,1)(6,5)}

Olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimde oluşturulur:

X=x	2	3	5	7	11
P(X = x)	1/15	2/15	4/15	6/15	2/15

Olasılık dağılımı fonksiyonu aşağıda verilen iki farklı biçimde oluşturulabilir:

X=x	x<2	2⩽x<3	3⩽x<5	5⩽x<7	7⩽x<11	11⩽x
P(X = x)	0	1/15	3/15	7/15	13/15	1

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, x < 2 \\ 1/15\ , 2 \leq x < 3 \\ 3/15\ , 3 \leq x < 5 \\ 7/15\ , 5 \leq x < 7 \\ 13/15\ , 7 \leq x < 11 \\ 1\,, 11 \leq x \end{cases}$$

Örnek 3.12. Çevre düzenlemesi yapan bir mühendis her yıl yol kenarındaki ağaç boylarının uzamasını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ k\left(x + \frac{1}{2}\right) & , \ 0 \le x < 2 \\ 1 & , \ x \ge 2 \end{cases}$$

a. Fonksiyonda verilen k sabitini bulunuz?

b. Olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre $P(x \le 1)$ ve $P(1/3 \le x \le 1)$ olasılıkları bulunuz?

c. X'in dağılım fonksiyonunu bulup ve bu fonksiyon yararlanarak $P(x \le 1)$ ve $P(1/3 \le x \le 1)$ olasılıkları bulunuz?

Çözüm:

a. $f(x)$ sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f) olarak verildiğine göre (ağaç boyları sürekli değişken), daha önce belirtilen o.y.f'un özelliğinden tanım aralığında integral 1'e eşittir.

$$\int_0^2 k\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1 \Longrightarrow k\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^2 = 1$$

$$\Longrightarrow k\left[\frac{(2)^2-(0)^2}{2}+\frac{1}{2}(2-0)\right] = 1 \Longrightarrow k = \frac{1}{3}$$

b. $P(x \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$$P\left(\frac{1}{3} \le x \le 1\right) = \int_{1/3}^1 \frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})dx = \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2})\Big|_{1/3}^1 = \frac{7}{27}$$

c. $F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}(t+\frac{1}{2})dt = \frac{1}{3}(\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t)\Big|_0^x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2-0}{2}+\frac{1}{2}(x-0)\right]$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$$

Dağılım fonksiyonunun özelliklerine göre, $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} 0\,, x<0 \\ \frac{1}{3}\left(\frac{x^2+x}{2}\right), 0\le x<2 \\ 1\,, x\ge 2 \end{cases}$$

biçiminde gösterilir.

$$P(x\le 1)=F(1)=\frac{1}{3}(\frac{1^2+1}{2})=\frac{1}{3}$$

$$P\left(\frac{1}{3}\le\ x\ \le\ 1\right)=F(1)-F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$$

Aynı olasılığı, olasılık yoğunluk fonksiyonunun aynı aralıkta integrali alınarak da hesaplanabilir.

$P(x\le 1)$ olasılığı o.y.f kullanılarak b şıkkında çözülmüştü.

$$P\left(\frac{1}{3}\le\ x\ \le\ 1\right)=\underbrace{\int_{1/3}^{1}F(x)dx}_{}=\underbrace{\int_{1/3}^{1}f(x)dx\ ise}_{}$$

Dağılım fonksiyonu Olasılık fonksiyonu

$$P\left(\frac{1}{3}\le\ x\ \le\ 1\right)=\int_{1/3}^{1}\frac{1}{3}(\frac{x^2+x}{2})dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})dx=\frac{7}{27}$$

1. İki madeni paranın birlikte atılması olayında X rastgele değişkeni turaların sayısını göstersin. X'in olasılık fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: $S = 2^2 = 4$ ve örnek uzayı S = {TT, TY, YT, YY} olur, X değerleri 0, 1, 2 alır. Bu değerlerin olasılığı,

$P(X = 0) = P(\text{YY}) = 1/4$

$P(X = 1) = P(\text{TY, YT}) = 1/2$

$P(X = 3) = \text{P(YY)} = 1/4$

olur. X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

X = x	0	1	2
P(X = x)	1/4	1/2	1/4

2. Bir telefoncuda satılan 8 telefondan iki tanesi bozuktur. Bu telefonlardan iki tane alınmaktadır. X rastgele değişkeni bozuk telefon sayısını gösterdiğine göre olasılık fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: X rastgele değişkeni 0, 1, 2 değerleri alacağından kesikli olasılık fonksiyonudur.

$$P(X=0)=P(SS)=\frac{6}{8}.\frac{5}{7}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=1)=P(HS,SH)=\frac{2}{8}.\frac{6}{7}+\frac{6}{8}.\frac{2}{7}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

$$P(X=2)=P(HH)=\frac{2}{8}.\frac{1}{7}=\frac{2}{56}$$

3. Bir sigorta şirketinin ayda sigortaladığı arabaların sayısını gösteren X rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$P(X) = \begin{cases} \frac{k}{x}, & x = 1,2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

a. k değerini bulunuz?

b. $P(X > 0)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a. $\sum_{i=1}^{2} k\frac{1}{x} = 1$ eşitliğinden $k = \frac{2}{3}$

b. $P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{3}.1 + \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = 1$

4. X rastgele değişkeni altı çocuklu ailelerdeki erkeklerin sayısını göstersin. Erkekler ve kızlar için eşit olasılıklı varsayımı altında X'in olasılık fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm:

$$P(E) = \frac{1}{2} \text{ ve } P(K) = \frac{1}{2} \text{ ise } P(\mathrm{x}) = \binom{6}{x} . \left(\frac{1}{2}\right)^{6} , x = 0,1,2, \dots ,6$$

5. Sigara içme durumuna göre kandaki nikotin miktarını (mg) gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{15}x^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

a. $P(x > 1)$ olasılığını,

b. $P(1 \leq x \leq 1.5)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a-) $$\int_1^2 \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{4}{15}.\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{4}{15}\left[\frac{(2)^4 - (1)^4}{4}\right] = 1$$

b-) $$\int_1^{1.5} \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{4}{15}.\frac{x^4}{4}\Big|_1^{1.5} = \frac{4}{15}\left[\frac{(1.5)^4 - (1)^4}{4}\right] = 0.271$$

6. Bir kahvenin maliyetini gösteren *X* rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \frac{1}{1.5}\,, 15.5 \leq x \leq 17.0$$

Bu maliyetin $P(\mathrm{x} \leq 16.0)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

$$P(x \leq 16.0) = \int_{15.5}^{16.0} f(x)dx = \int_{15.5}^{16.0} \frac{1}{1.5} dx$$

$$= \frac{x}{1.5}\Big|_{15.5}^{16.0} = \frac{16.0 - 15.5}{1.5} = 0.333$$

7. Bir üniversitedeki öğrencilerin derse geç kalma sürelerini (dk) gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} k(x^2+1), & 1 \le x \le 4 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

a. k sabitini bulunuz?

b. $P(x \ge 2)$ olasılığını bulunuz?

c. $P(2 < x \le 3)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ olmalıdır. Yani,

$$\int_1^4 k(x^2+1)dx = 1 \Rightarrow k(\frac{1}{3}x^3 + x)\Big|_1^4 = 1$$

$$= k\left[\frac{1}{3}.(4^3 - 1^3) + (4-1)\right] = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{24}$$

b. $\int_2^4 \frac{1}{24}(x^2+1)dx = \frac{1}{24}(\frac{x^3}{3} + x)\Big|_2^4 = \frac{1}{24}(\frac{56}{3} + 2) = \frac{31}{36}$

c. $\int_2^3 \frac{1}{24}(x^2+1)dx = \frac{1}{24}(\frac{x^3}{3} + x)\Big|_2^3 = \frac{11}{36}$

8. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x \,, 0 \leq x \leq 3 \\ 2 - \frac{1}{2}x \,, 3 \leq x \leq 4 \\ 0 \,, d.d \end{cases}$$

$P(2 \leq x \leq 4)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

$$\int_2^3 \frac{1}{6} x dx = \frac{1}{6} \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^2 - 2^2}{2} \right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_3^4 2 - \frac{1}{2} x dx = (2x - \frac{1}{4} x^2) \Big|_3^4 = 2(4-3) - \frac{1}{4}(4^2 - 3^2) = \frac{1}{4}$$

$$P(2 \leq x \leq 4) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

9. *X* kesikli rastgele değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, x < 1 \\ \frac{1}{3}\,, 1 \le x < 4 \\ \frac{1}{2}\,, 4 \le x < 6 \\ \frac{5}{6}\,, 6 \le x < 10 \\ 1\,, x \ge 1 \end{cases}$$

a. Dağılımın fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

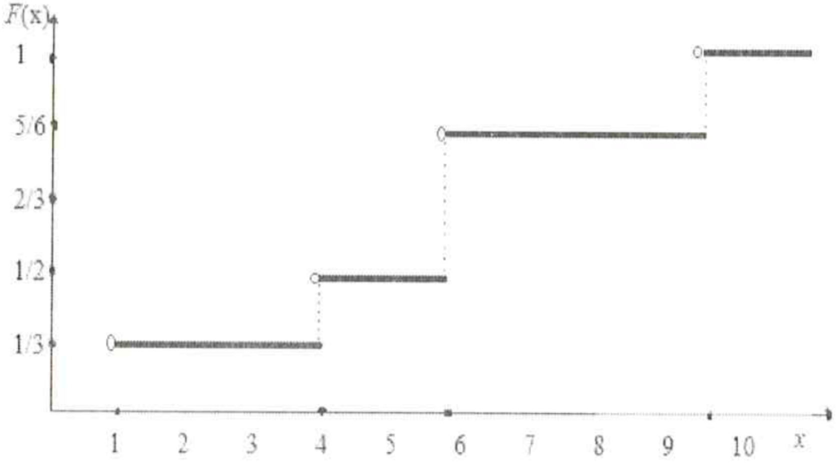
b. $P(2 < X \le 6)$ olasılığını bulunuz?

c. $P(X = 4)$ olasılığını bulunuz?

d. *X*'in olasılık fonksiyonunu yazınız?

Çözüm:

a.



b. $P(2 < X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 1) = F(6) - F(1)$

$$= \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c. $f(4) = P(X = 4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

d.

X=x	1	4	6	10
f(x)	1/3	1/6	1/3	1/6

10. X rastgele değişkeni sırasıyla -1, 1, 2, 3 değerlerini almakta ve olasılıkları sırasıyla 1/4, 1/8, 1/8, 1/2 almaktadır. Buna göre fonksiyonun dağılım fonksiyonunu yazınız?

Çözüm: X kesikli rastgele değişken olduğundan,

$$f(-1) = P(X = -1) = \frac{1}{4} \Rightarrow F(-1) = P(X \leq -1) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{8} \Rightarrow F(1) = P(X \leq -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{8} \Rightarrow F(2) = P(X \leq 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(3) = P(X \leq 3) = \frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3}{8}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

11. Bir mühendis çevre düzenlemesi için dökülen asfalt miktarını (bin ton) gösteren X sürekli rastgele değişkeninin kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, x < 0 \\ \frac{1}{32}(6x^2 - x^3)\,, 0 \leq x \leq 4 \\ 1\,, x > 4 \end{cases}$$

$P(2 < X < 3)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

$$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2)$$

$$= \frac{1}{32}[6(3)^2 - 3^3] - \frac{1}{32}[6(2)^2 - 2^3) = \frac{11}{32}$$

12. Hava sıcaklığı ölçümündeki hataları gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

X'in dağılım olasılık fonksiyonunu yazınız?

Çözüm:

$$a \leq -1 \Rightarrow F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx =$$

$$-1 < a < 2 \Rightarrow F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-1}^{a} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} x^3 \Big|_{-1}^{a} = \frac{1}{9}(a^3 + 1)$$

$$a \geq 2 \Rightarrow F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} x^3 \Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{9}(8 + 1) = 9$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{9}(x^3 + 1), & -1 < x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

13. X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x} & , 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & , d.d. \end{cases}$$

a. k sabitini bulunuz?

b. Dağılım fonksiyonunu yazınız?

c. $P(X \leq 2.5)$ olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{4} \frac{k}{x} dx = k.\, lnx|_{1}^{4} = k(ln4 - ln1) = 1\ k = \frac{1}{ln4}$

b. $F(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$x < 1 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$$

$$1 \leq x \leq 4 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{dt}{ln4t} = \frac{1}{ln4} lnt\Big|_{1}^{x} = \frac{1}{ln4} lnx$$

$$x > 4 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{1}^{4} \frac{dt}{ln4t} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, x < 1 \\ \frac{1}{ln4} lnx\,, 1 \leq x \leq 4 \\ 1\,, x > 4 \end{cases}$$

c. $P(X \leq 2.5) = F(2.5) = \frac{1}{ln4} ln(2.5) = 0.661$