

Hafta 1

Temel Kavramlar

Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

Olasılık ve İstatistik

Problemler ve Çözümleri ile



9. BASKI

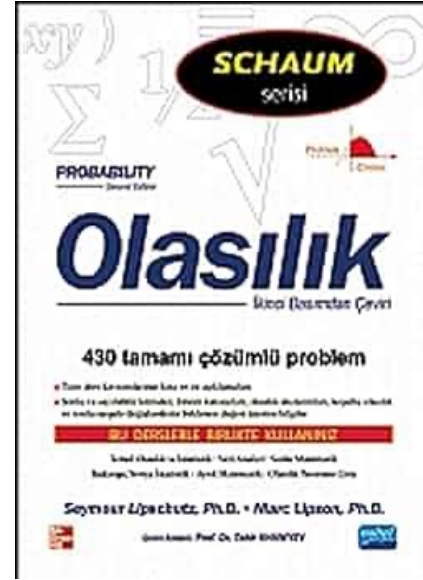
MATLAB Uygulamalı

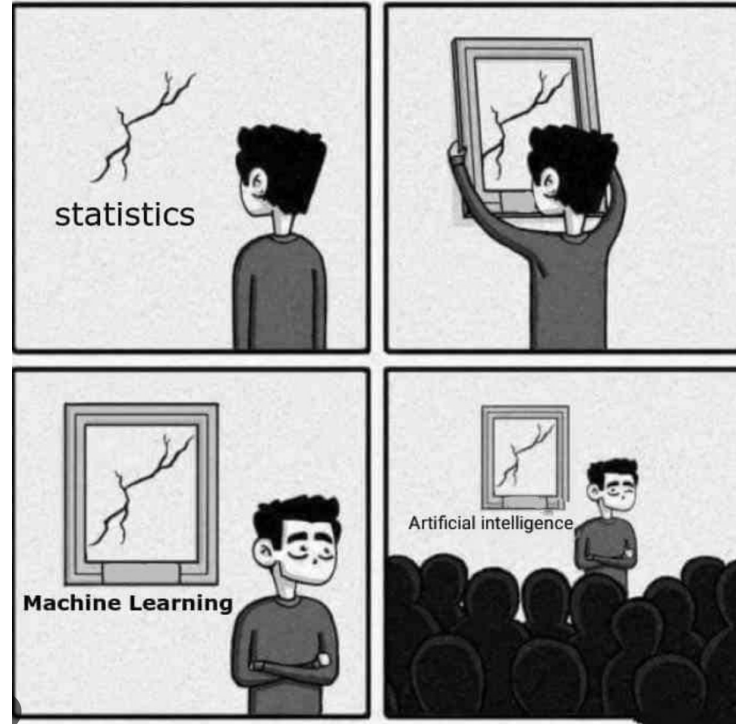
Olasılık Teorisi ve Rastgele Değişkenler

150'li Çözümlü,
400 Örnek Problem



Öğr. Gör. Engin GÜL







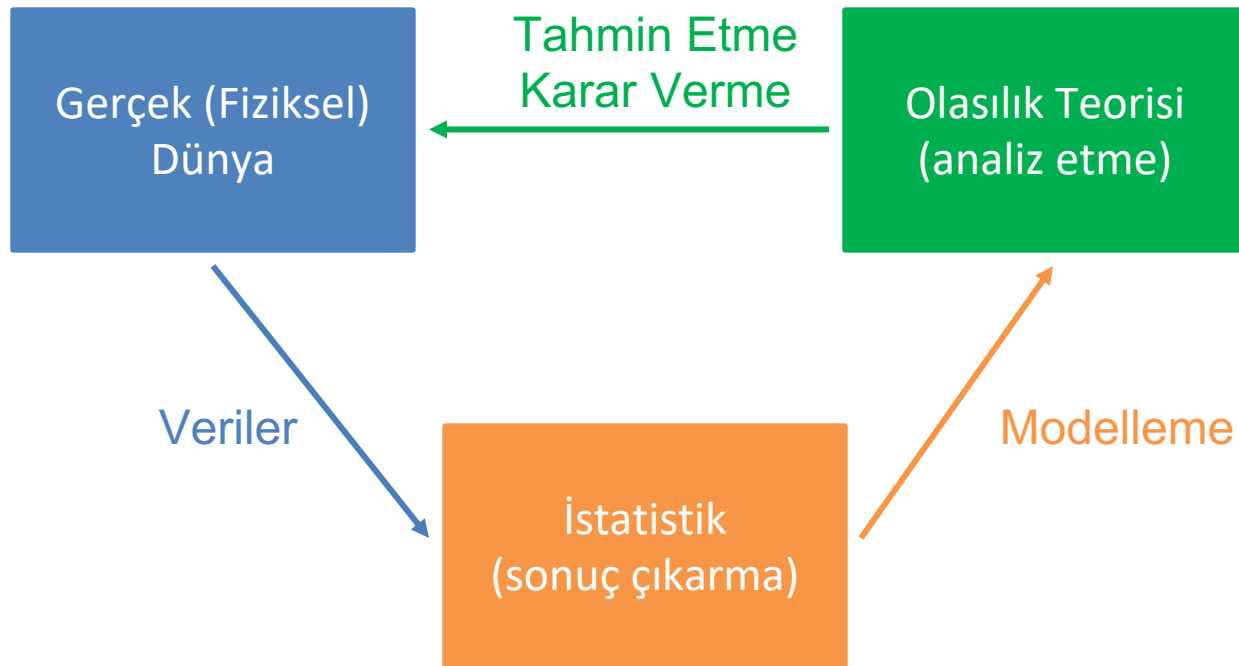
DeepLearning.AI

-
- Küme teorisi,
 - Sayılabilir sayılamaz kümeler,
 - Fonksiyonlar

Olasılığa Giriş

Amaç: Rastgele, tesadüfi, gelişigüzel, belirsiz gerçekleştiği düşünülen fiziksel olayların matematiksel modellenmesi ve bu olayların gerçekleşme mantığının belirlenmesi.

Olasılığa Giriş



Küme Teorisi

Özenle hazırlanmış tekrarsız nesneler (öğeler) topluluğuna **küme** denir.

Örnek: Türkçedeki sesli harfler kümesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$B = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}$$

- $a \in B$
- $k \notin B$
- $|B| = 8$ ($|B|$, B kümesinin eleman sayısını gösterir)

Küme Teorisi

Örnek: Elemanları **ayrık** olan kümeler

$$C = \{x \in \mathbb{Z}: -2 \leq x \leq 3\}$$

$$C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$|C| = 6$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z}: x \geq 2\}$$

$$D = \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$|D| = \infty \text{ (Sayılabilir)}$$

Küme Teorisi

Örnek: Elemanları **sürekli** olan kümeler

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$$

$$0 \in E, 1 \notin E,$$

$$|E| = \infty (\text{Sayılamaz})$$

Kartezyen Çarpım

Örnek: A, B kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$A = \{a, a \in \mathbb{Z}: 1 \leq a \leq 3\} \quad B = \{b, b \in \mathbb{Z}: 1 \leq b \leq 5\}$$

Bu iki kümenin Kartezyen çarpımı $C = A \times B$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$C = \{(a, b): a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

$$(1, 2) \in C$$

$|C| = 15$ (C kümesi sayılabilen ve **AYRIK** elemanlardan oluşur)

Kartezyen Çarpım

Örnek: A, B kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun

$$A = \{a, a \in R: 1 \leq a \leq 3\} \quad B = \{b, b \in R: 1 \leq b \leq 5\}$$

Bu iki kümenin Kartezyen çarpımı $E = A \times B$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$E = \{(a, b): a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

$|E| = \infty$ (E kümesi sayılamaz ve **SÜREKLİ** elemanlardan oluşur)

Boş Küme, Evrensel Küme, Alt Küme

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir

$$A = \{ \} \text{ veya } A = \emptyset$$

Şayet bir A kümesinin bütün elemanları B kümesinin de elemanı ise A ya B kümesinin **alt kümesi** denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir

Üzerinde işlem yapılan bütün kümeleri kapsayan kümeye **evrensel küme** denir

Bir Kümenin Alt Kümeleri

Alt Küme: A kümesinin toplam alt kümelerinin sayısı $2^{|A|}$ dır

$A = \{1,2,3\}$ olduğuna göre A kümesinin alt kümelerini bulunuz

$$2^{|A|} = 2^3 = 8$$

$$A_1 = \emptyset$$

$$A_5 = \{1,2\}$$

$$A_2 = \{1\}$$

$$A_6 = \{1,3\}$$

$$A_3 = \{2\}$$

$$A_7 = \{2,3\}$$

$$A_4 = \{3\}$$

$$A_8 = \{1,2,3\}$$

Bir Kümenin r-Elementli Alt Kümeleri

A kümesinin eleman sayısı $n = |A|$ ise r elemanlı alt kümelerinin sayısı:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$A = \{1,2,3\}$ olduğuna göre A kümesinin bir elemanlı ve üç elemanlı alt kümelerini bulunuz

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)! 1!} = 3$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)! 3!} = 1$$

Küme İşlemleri

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ ve *Evrensel Küme* $= \{1,2,3,4,5,6,7\}$ olduğu kabul edilirse;

- **Birleşim:** $D = A \cup B$, $D = \{1,2,3,4,5\}$
- **Kesişim:** $C = A \cap B$, $C = \{3\}$
- **Tümleyen:** $A^c = \{x: x \in E \text{ ve } x \notin A\}$, $A^c = \{4,5,6,7\}$
- **Fark:** $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ ve } x \notin B\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$ ve $B \setminus A = \{4,5\}$

Fonksiyonlar

Fonksiyon: f , X kümesinden Y kümesine bir bağıntı olsun. f bağıntısında X 'in istisnasız her elemanı Y 'nin en fazla ve en az bir elemanı ile eşleşiyorsa f bağıntısına fonksiyon denir ve $f: X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir. X kümesine **tanım kümesi**, Y kümesine **değer kümesi** denir.

Görüntü Kümesi: X in bir alt kümesi olan A kümesinin f fonksiyonu altındaki **görüntüsü** Y 'nin bir alt kümesidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f[A] = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\}$$

Fonksiyonlar

Ters Görüntü Kümesi: Y 'nin bir alt kümesi olan B kümesinin f fonksiyonu altındaki **ters görüntüsü** X 'in bir alt kümesidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

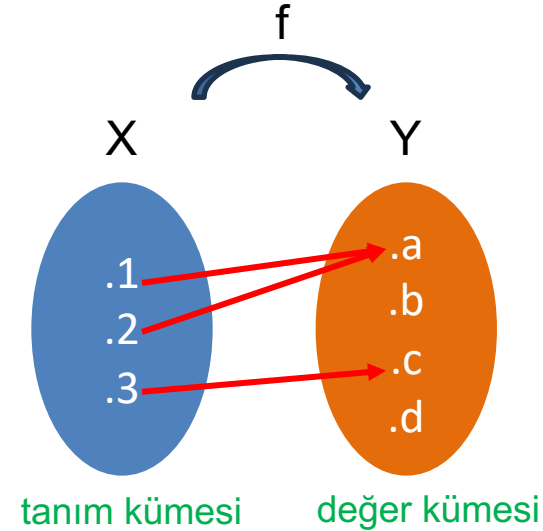
$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Burada f^{-1} , f fonksiyonunun tersi değildir.

Fonksiyonlar

Örnek: $X = \{1,2,3\}$ ve $Y = \{a,b,c,d\}$ iki küme olsun. f fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor. $f: X \rightarrow Y$ öyleki;

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{şayet } x = 1 \\ a & \text{şayet } x = 2 \\ c & \text{şayet } x = 3 \end{cases}$$

- $\{2,3\}$ kümesinin görüntüsü $f\{2,3\} = \{a,c\}$
- $\{a\}$ kümesinin ters görüntüsü $f^{-1}\{a\} = \{1,2\}$
- $\{b,d\}$ kümesinin ters görüntüsü $f^{-1}\{b,d\} = \emptyset$





DeepLearning.AI



Olasılık Kuramının Temelleri

Temel Kavramlar

Rastgele Deney: Sonuçları önceden bilinmeyen tekrarlanabilir deneylere denir. Kısaca **deney** olarak isimlendirilir.

Sonuç: Deneyin gerçekleşmesi sonrası ortaya çıkan durum, sonuç.

Örnek Uzay (Evrensel Küme): Deneye ait olası tüm sonuçların oluşturduğu küme

Olay: Örnek uzayın herhangi bir alt kümesi.

Temel Kavramlar

Olasılık Teorisi

- Sonuç
- Olay
- Örnek Uzayı

Küme Teorisi

- Küme elemanları
- Küme
- Evrensel küme

Temel Kavramlar

Deney: Sonuçları önceden bilinmeyen ve tekrarlanabilir hadiseler

Deney1: Olasılık dersinden dönem sonunda alacağınız not

Deney2: Bozuk parayı havaya atıp sonucunu gözlemlemeniz

Deney3: Otobüs durağında otobüsün gelmesi için ne kadar bekleyeceğiniz

Sonuç: Gözlenen deneye ait herhangi bir sonuç.

Deney1'e ait bazı sonuçlar: {10,26,59,90}

Deney2'ye ait bazı sonuçlar: {Yazı, Tura, Dik}

Deney3'e ait bazı sonuçlar: {10 dk dan az, 10dk, 2 saatten çok}

Temel Kavramlar

Örnek Uzay: Gözlenen deneye ait olası tüm sonuçlar

Deney1: $\Omega_1 = \{x : 0 \leq x \leq 100, x \in \mathbb{Z}\}$ (Ayrık)

Deney2: $\Omega_2 = \{\text{Yazı}, \text{Tura}\}$ (Ayrık)

Deney3: $\Omega_3 = \{t : t > 0, t \in \mathbb{R}\}$ (Sürekli)

Olay: Örnek uzayın herhangi bir alt kümesi.

Deney1 $A = \{10 \leq x \leq 40\}$

Deney2 $B = \{\text{Yazı}\}$

Deney3 $C = \{5dk \leq t \leq 15dk\}$

Temel Kavramlar

Örnek: Bir zar atılarak rastgele bir deney gerçekleştiriliyor

Örnek uzay: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ (Ayrık)

$$|\Omega| = 6$$

Olay: $A = \{1,3,5\}$ (tek sayıların gelmesi)

$$\text{Olay sayısı} = 2^n = 2^6 = 64$$

Temel Kavramlar

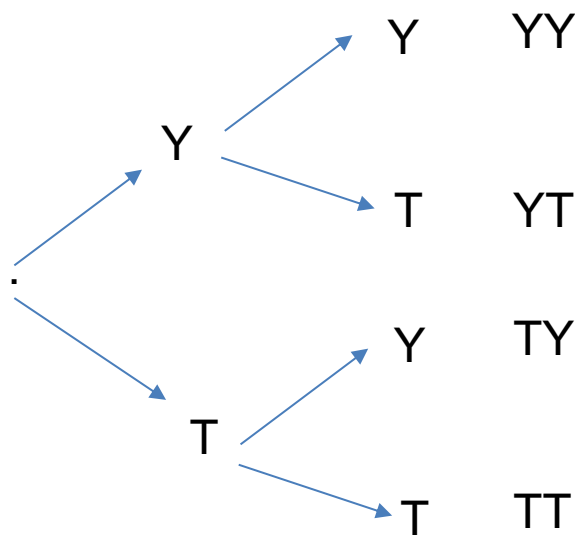
Örnek: Madeni para **iki kez atılıyor** ise örnek uzayı bulunuz ($\Omega=?$) (Kartezyen Çarpım)

Tablo Yöntemi

birinci atış	Y	{Y,Y}	{Y,T}
	T	{T,Y}	{T,T}
		Y	T
		ikinci atış	

Örnek uzay: $\Omega = \{YY, YT, TY, TT\}$ (Ayrık)

Ağaç Yöntemi



Temel Kavramlar

Örnek: Dört yüzlü bir zar iki kez atılıyor ($\Omega=?$)

Tablo Yöntemi

		ikinci atış			
		1	2	3	4
birinci atış	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Örnek uzay: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots (4,4)\}$ (Ayrık)

$$|\Omega| = 16$$

$$\text{Olay sayısı} = 2^{16}$$

Ağaç Yöntemi ile yapın...



DeepLearning.AI



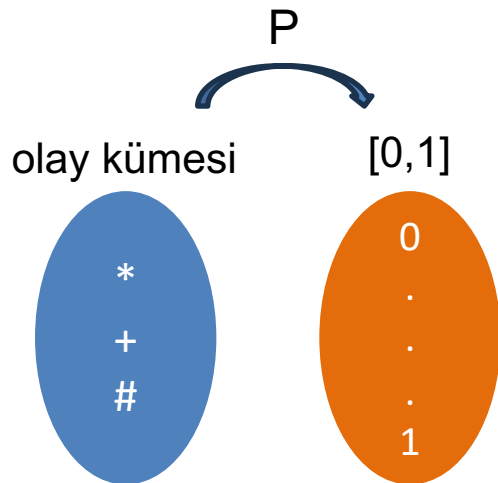
Olasılık ve Temel Aksiyomları

Olasılık Nedir?

Olasılık: Olasılık (P) bir **fonksiyondur**. Tanım kümesi olaylar, değer kümesi ise $[0-1]$ aralığındadır.

P : *olay kümesi* $\rightarrow [0,1]$

A bir olay ise $P(A) \in [0,1]$



Aksiyomlar

A ve B iki olay ve Ω örnek uzayında tanımlı olsun

1- $P(A) \geq 0$

2- $P(\Omega) = 1$

3- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *şayet* $A \cap B = \emptyset$ *ise* (A ve B ayrık, bağdaşmayan olaylar ise)

Olasılığın 0 olması ilgilenilen olayın gerçekleşmediği, olayın 1 olması ise olayın kesinlikle gerçekleştiğini ifade etmektedir.

Olasılığın temel özelliklerinden ikincisi ise bir basit olayların olasılıkları toplamı her zaman 1'e eşittir. Bir paranın bir kez atılması olayında $P(Y) + P(T) = 1$ dir.

Bir Olaya Olasılık Değerinin Atanması

1- Bağıl frekans yöntemi

2- Olasılık aksiyomlarına dayalı teorik yol

Bir Olaya Olasılık Değerinin Atanması

1- Bağlı frekans yöntemi

Bu yöntem olayların tanımlı olduğu rastgele deneyin bir çok kez tekrarlanması prensibine dayanır

Deneyin tekrarlanmas sayısı: n

A olayının gözlenme sayısı: n_A

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right)$$

Örnek

Bir yazı tura deneyin $n=1000$ kez tekrarlınsın. Bu tekrarlamada tura gelme sayısı $n_A = 570$ olsun. Bu durumda tura gelme olasılığını bulunuz.

$$P(T) \cong \frac{570}{1000} = 0.57$$


yaklaşık olmasının sebebi deneme sayısının sonsuza gitmemesi

$$P(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_T}{n} \right) = 0.5$$

Örnek

Bir fabrikada üretilen ürünlerden rastgele 100 tane alınmış ve 5 tanesinin kusurlu olduğu görülmüştür. Üretilen ilk ürünün kusurlu olması olasılığını bulunuz?

A olayı ürünün kusurlu olması,

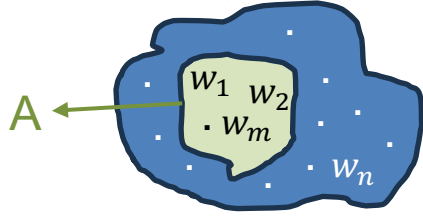
$$P(A) = \frac{f}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

Bir Olaya Olasılık Değerinin Atanması

2- Teorik Yol

Bu yöntem olasılık kuramının temeline dayanır.

Ω (Örnek Uzay)



$|A| = m$ olsun

$|\Omega| = n$ olsun

$m \leq n$

$P(A) = ?$

$A = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ (m tane sonuca sahip)

Her bir elemanı küme olarak düşünersek

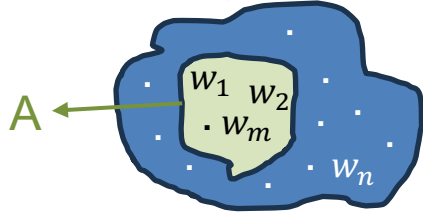
$A = \{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\}, \dots, \{w_m\}$ olarak yazılır

Her iki tarafın olasılığını alırsak

$P(A) = P(\{w_1\} \cup \{w_2\} \cup \{w_3\}, \dots, \{w_m\})$ olarak yazılır. w 'lar deneyin sonuçları olduğundan karşılıklı ayırıktır. Dolayısıyla denklem;

$$P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_m\})$$

Ω (Örnek Uzay)



$|A| = m$ olsun

$|\Omega| = n$ olsun

$m \leq n$

$P(A) = ?$

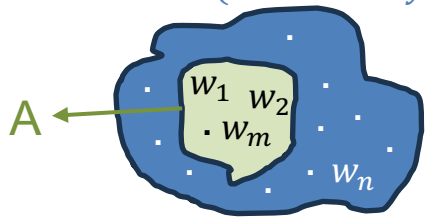
Özetle:

$A = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ şeklinde verilen olayın olasılığını bulmak için;

$P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_m\})$ formülü kullanılır

Genel Formül

Ω (Örnek Uzay)



$|A| = m$ olsun

$|\Omega| = n$ olsun

$m \leq n$

$P(A) = ?$

Özel Durum:

Şayet deneyin her bir **sonucu eşit olasılıklara sahipse** bu durumda;

$P(w_i) = \frac{1}{n}$ olur. Bu durumda

$$P(A) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_m\})$$

$$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

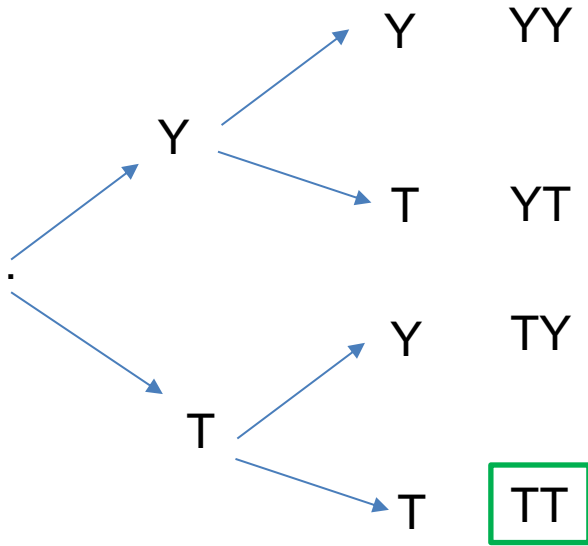


$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Özel Formül

Örnek

Hilesiz bir madeni para 2 kez atılarak bir deney gerçekleştiriliyor. En az bir yazı gelme olasılığını bulun.



$$\Omega = \{YY, YT, TY, TT\}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad W_4$

deneyin 4 tane sonucu var

$$A = \{YY, YT, TY\}$$

para **hilesiz** olduğundan her bir sonuç eşit olasılığa sahiptir

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$$

Örnek

Hileli bir madeni para 2 kez atılarak bir deney gerçekleştiriliyor. En az bir yazı gelme olasılığını bulun.

$$\Omega = \{YY, YT, TY, TT\}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{array}$$

deneyin yine 4 tane sonucu var. Para hileli olduğundan her bir sonucun olasılığını bilmemiz gerekiyor. Örneğin her bir sonuç yandaki olasılık değerlerine sahip olsun

$$A = \{YY, YT, TY\}$$

para **hileli** ve sonuçlar eşit olasılıklara sahip **olmadıklarından** $P(A) \neq \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$P(A) = \{YY\} \cup \{YT\} \cup \{TY\} = P(YY) + P(YT) + P(TY)$$

$$P(A) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

Ödev

Bir madeni paranın 3 kez atılması deneyinde,

- a. Yazı gelmemesi olasılığını bulunuz?
- b. En az bir yazı gelmesi olasılığını bulunuz?
- c. İki kez yazı gelmesi olasılığını bulunuz?
- d. En fazla bir yazı gelmesi olasılığını bulunuz?

Ödev

Bir zarın bir kez atılması deneyinde (olayında),

- a. Herhangi bir sayının üste gelmesi olasılığını bulunuz?
- b. Üst yüze gelen sayının çift sayı gelmesi olasılığını bulunuz?
- c. Üst yüze gelen sayının en az 4 gelmesi olasılığını bulunuz?