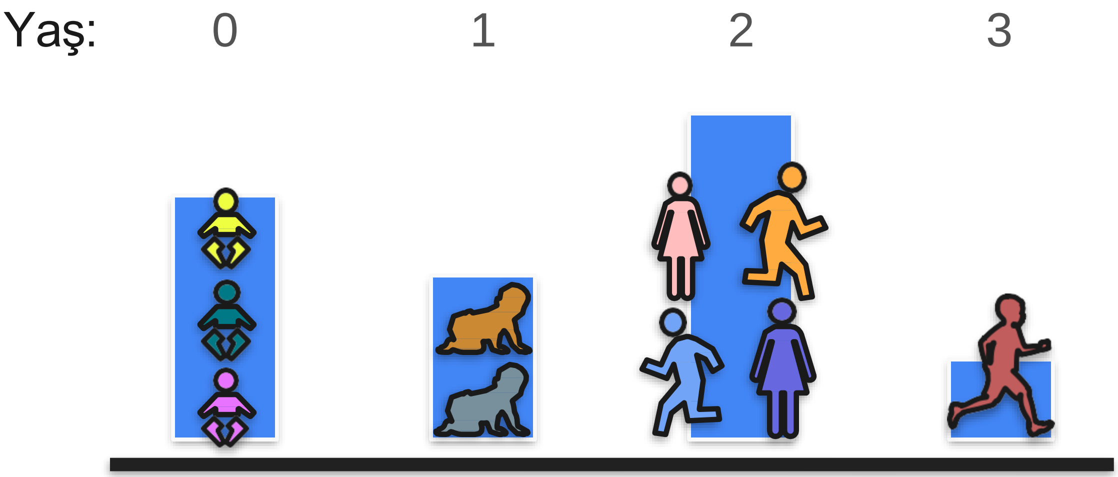
Hafta 8

DeepLearning.AI

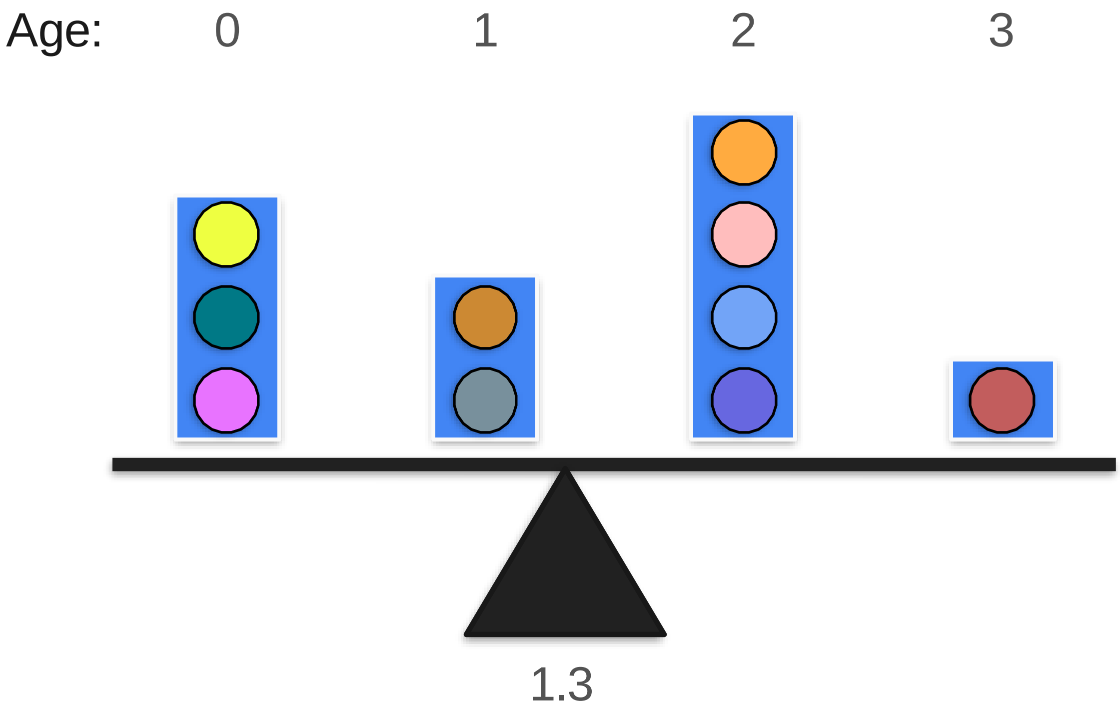
Dağılımın Tanımları

Beklenen Değer

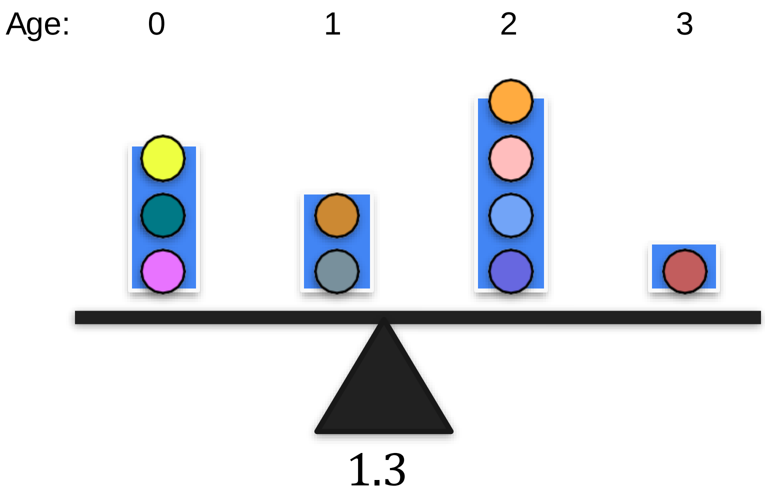
Ortalama (Mean): Örnek



Ortalama: Örnek



Ortalama: Örnek

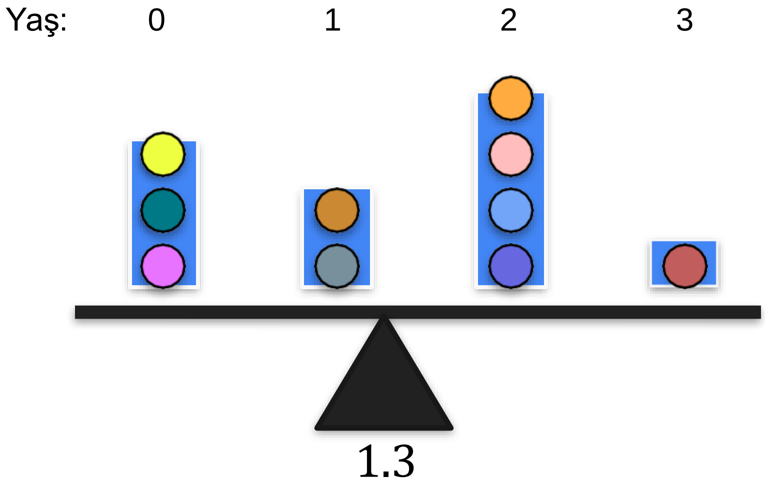


$$\frac{0+0+0+1+1+2+2+2+2+3}{10}$$

$$= \frac{13}{10}$$

$$= 1.3$$

Odadaki Çocuklar



$$\frac{0+0+0+1+1+2+2+2+2+3}{10}$$

$$= \frac{13}{10} = 1.3$$

$$= \frac{3\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot 3}{10}$$

Mean (Ortalama)

Ağırlıklı Ortalama

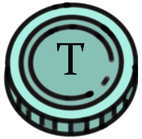
Expected Value (Beklenen Değer) $= \frac{3}{10}\cdot 0 + \frac{2}{10}\cdot 1 + \frac{4}{10}\cdot 2 + \frac{1}{10}\cdot 3 = 1.3$

$\mathbb{E}[X]$

Beklenen Değer: Motivasyon - Örnek 1

Arkadaşlarınızla bir oyun oynuyorsunuz

10 dollar kazanıyorsun



Hiçbir şey kazanamıyorsun

Oyun Ücreti:

$6

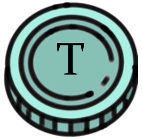
Oyunu oynar mıydınız?

Bu oyunu oynamak için maksimum ne kadar para vermeliyiz?

Beklenen Değer: Motivasyon - Örnek 1

Arkadaşlarınızla bir oyun oynuyorsunuz

10 dollar kazanıyorsun



Hiçbir şey kazanamıyorsun

Oyun Ücreti:

$4

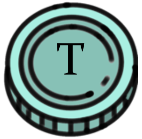
Oyunu oynar mıydınız?

Bu oyunu oynamak için maksimum ne kadar para vermeliyiz?

Beklenen Değer: Motivasyon - Örnek 1

Arkadaşlarınızla bir oyun oynuyorsunuz

10 dollar kazanıyorsun



Hiçbir şey kazanamıyorsun

Oyun Ücreti:

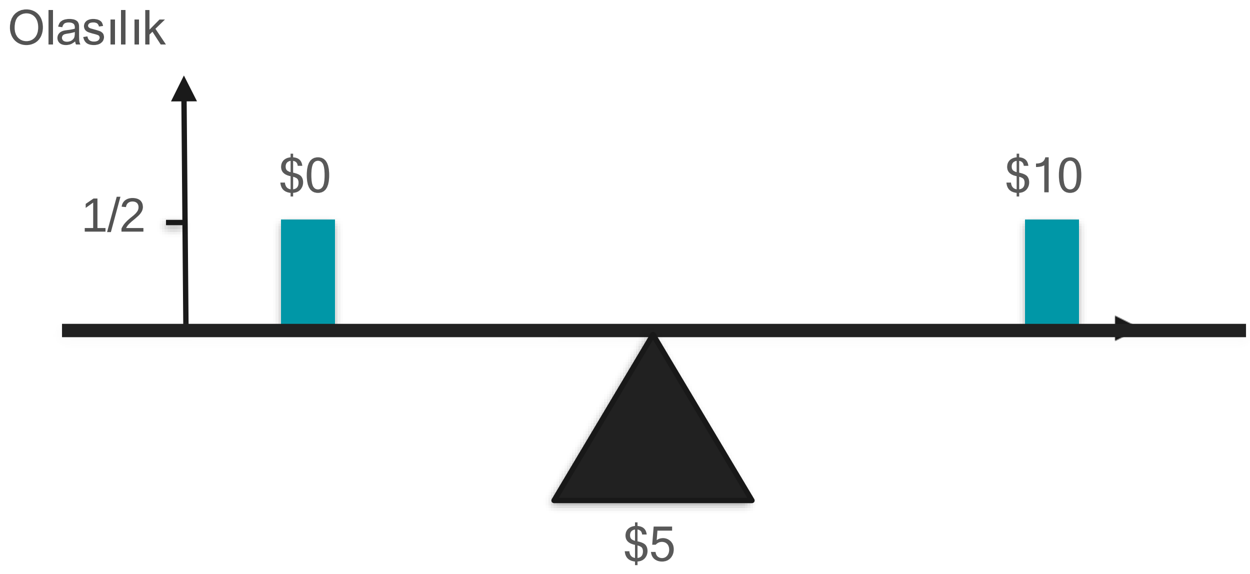
5 doların altını kabul etmeli üstünü etmemelisin

\$5

Long term: $0.5 \cdot \$10 \;+ 0.5 \cdot \$0 = \;\$5$ → You expect to win \$5 on average

$\mathbb{E}[X] = \;5$

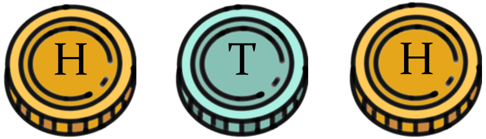
Beklenen Değer: Motivasyon - Örnek 1



Beklenen değer, dağılımı dengeleyen noktadır.

Beklenen Değer: Motivasyon - Örnek 2

Başka bir oyun



3 bozuk para atılıyor. Her bir heads için $1 dolar kazanıyorsun

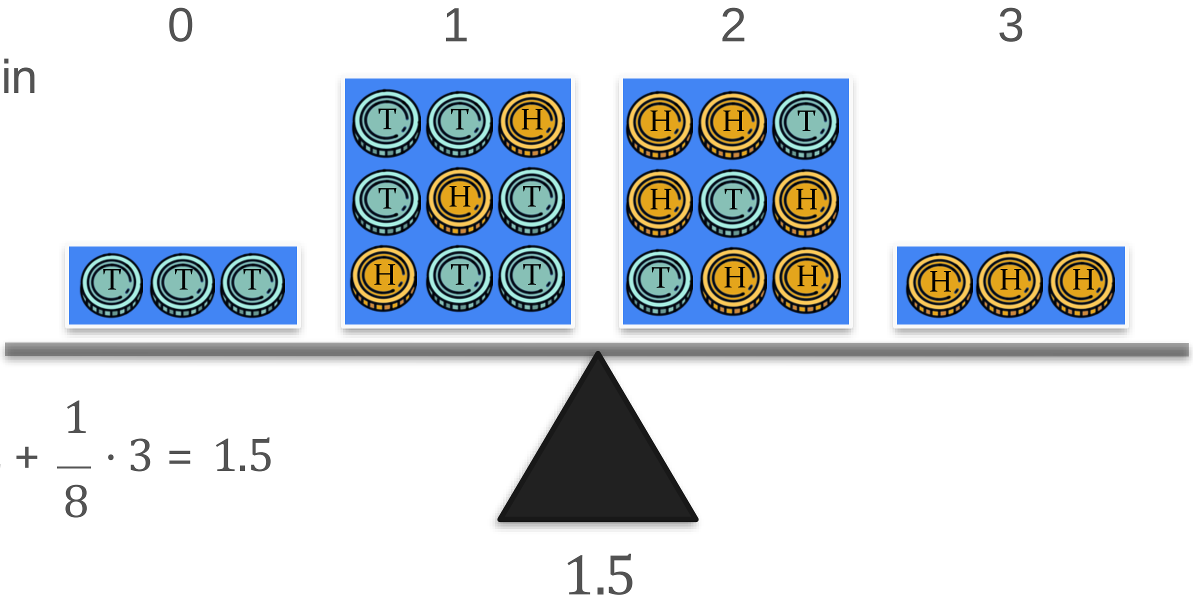
Bu oyunu oynamak için maksimum ne kadar para vermeliyiz?

Beklenen Değer: Motivasyon - Örnek 2

X : heads sayısını göstersin

$$\mathbb{E}[X] = 1.5$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = 1.5$$



Beklenen Değer: Ayrık Durum

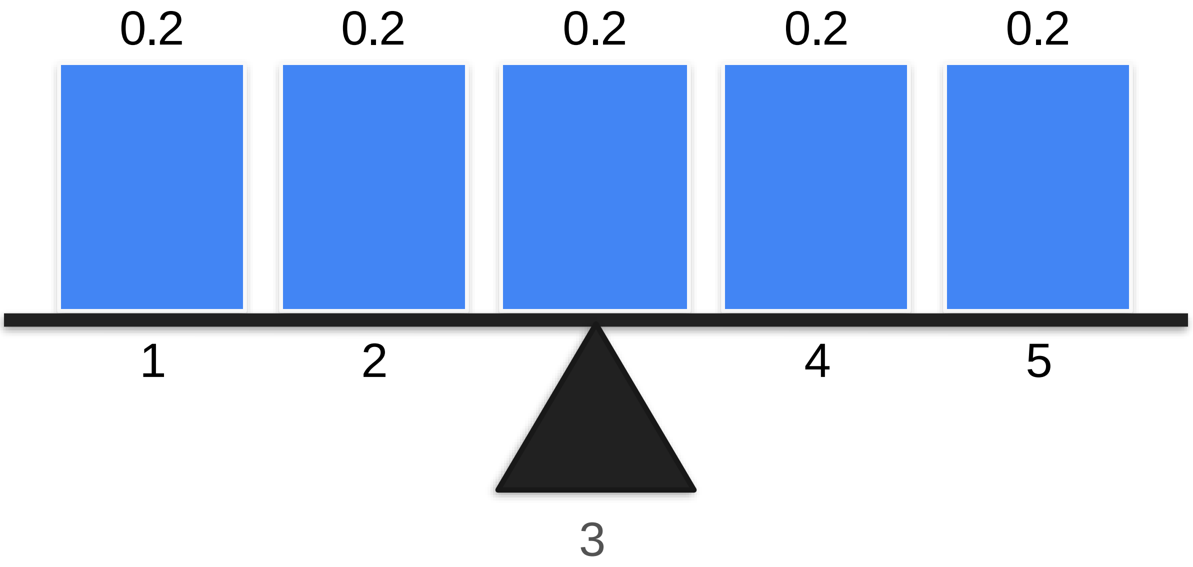
X ayrık bir rastgele değişkendir

PMF of X

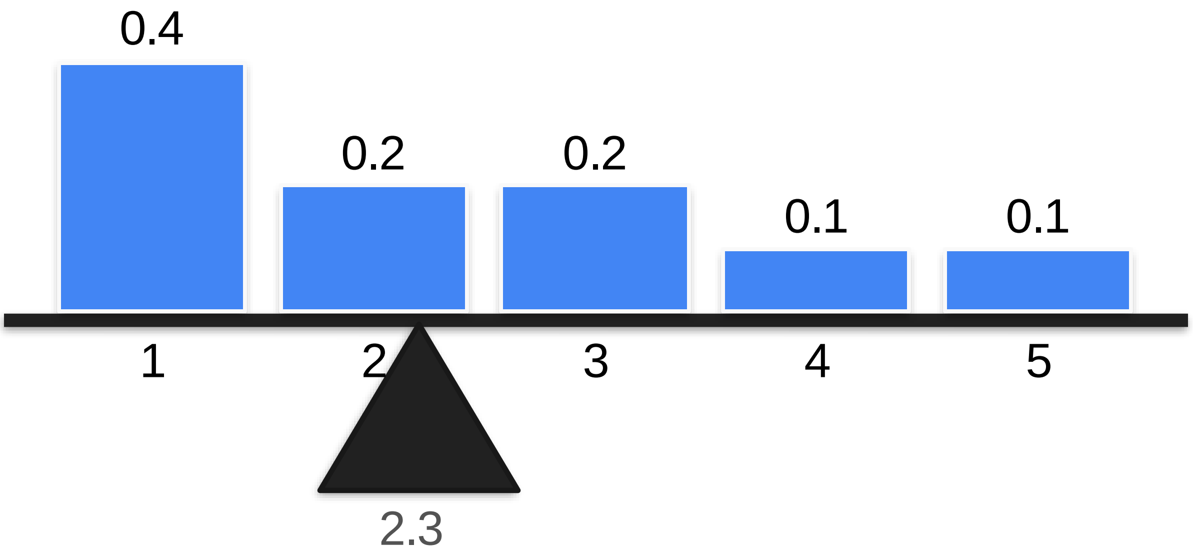
$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, p_X(x)$$

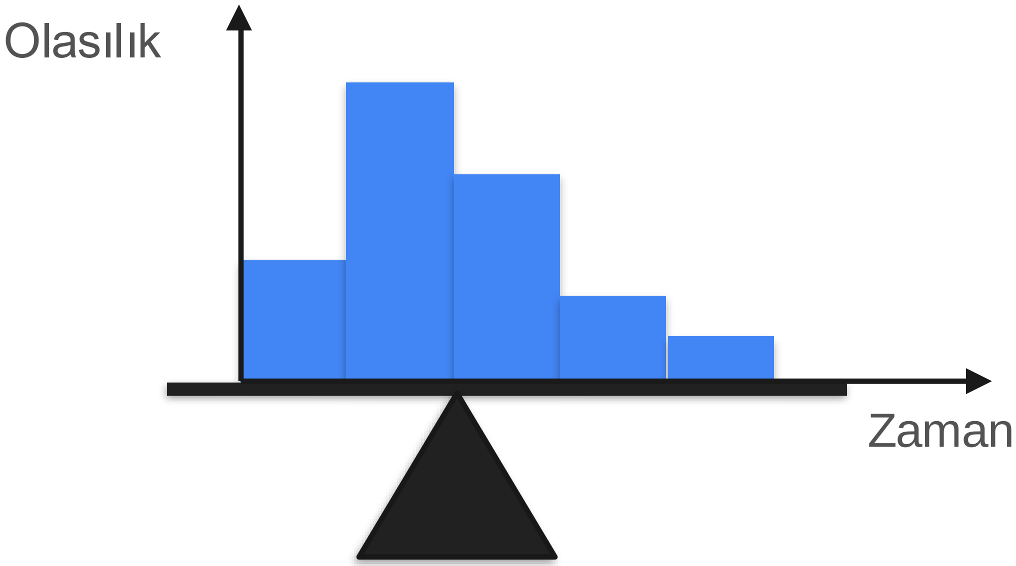
Beklenen Değer



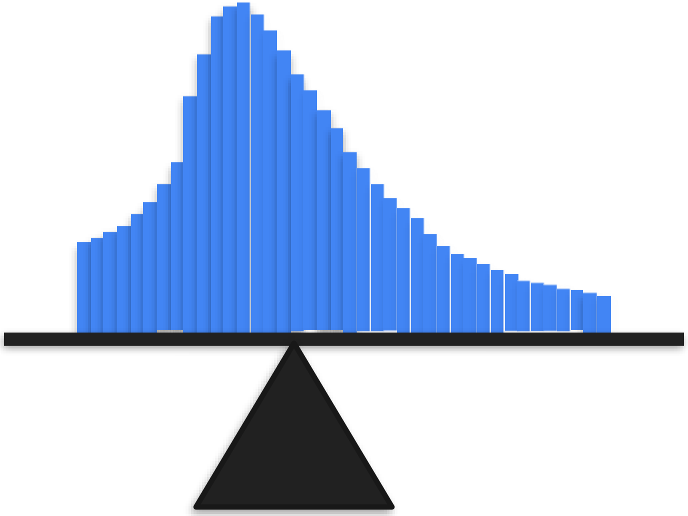
Beklenen Değer



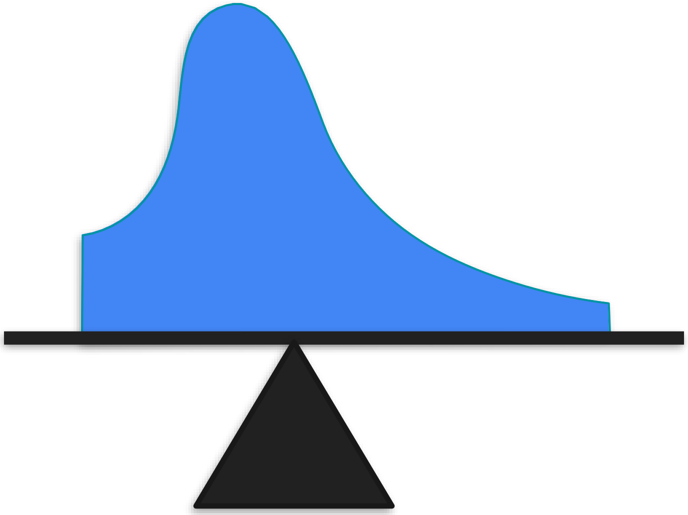
Beklenen Değer - Sürekli



Beklenen Değer - Sürekli



Beklenen Değer - Sürekli



Beklenen Değer - Sürekli

Discrete random variables

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, p_X(x)$$

Weighted using PMF

Continuous random variables

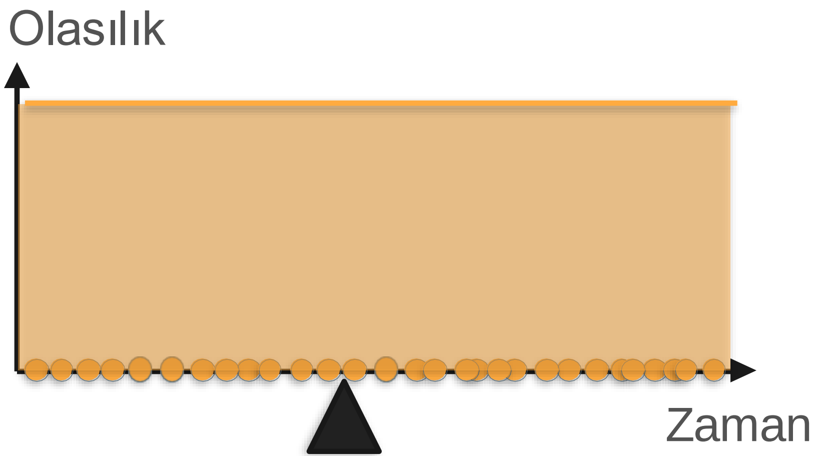
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

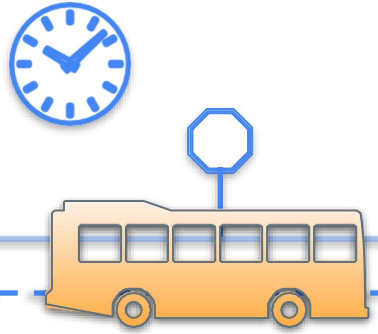
Weighted using PDF

Beklenen Değer (Sürekli)

Bekleme Zamanı
15 min
32 min
58 min
1 min
47 min
14 min
37 min
8 min
29 min
55 min
…

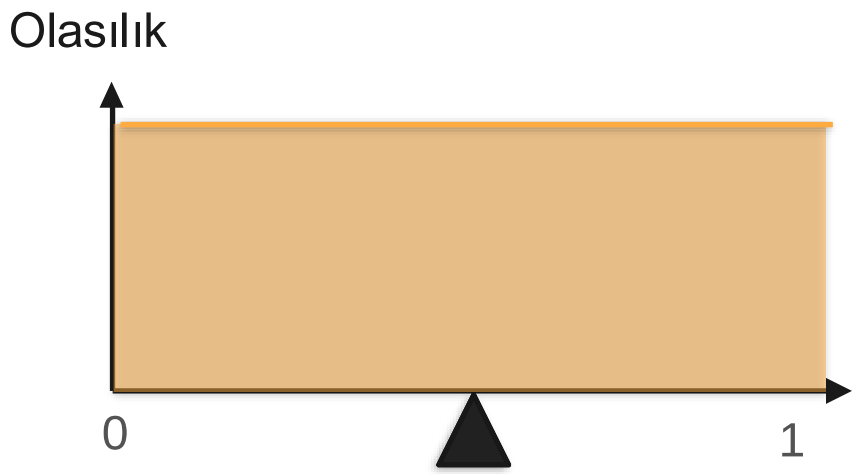
Average = 30





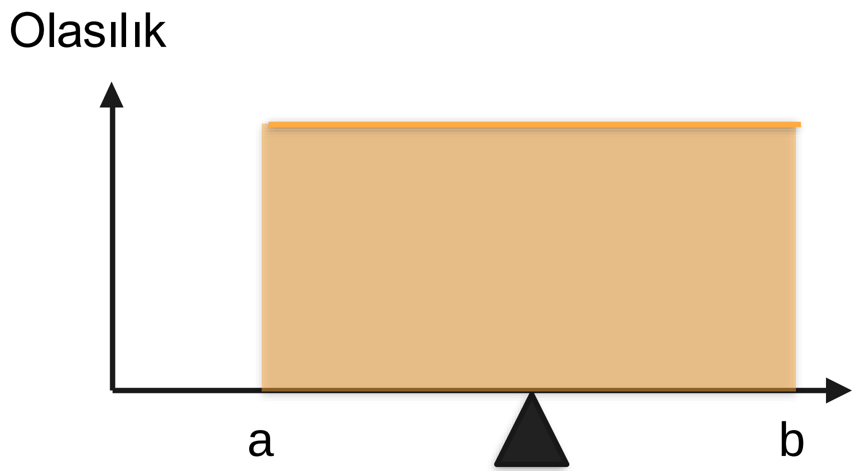
Beklenen Değer: Düzgün Dağılım

Ortalama = 0.5



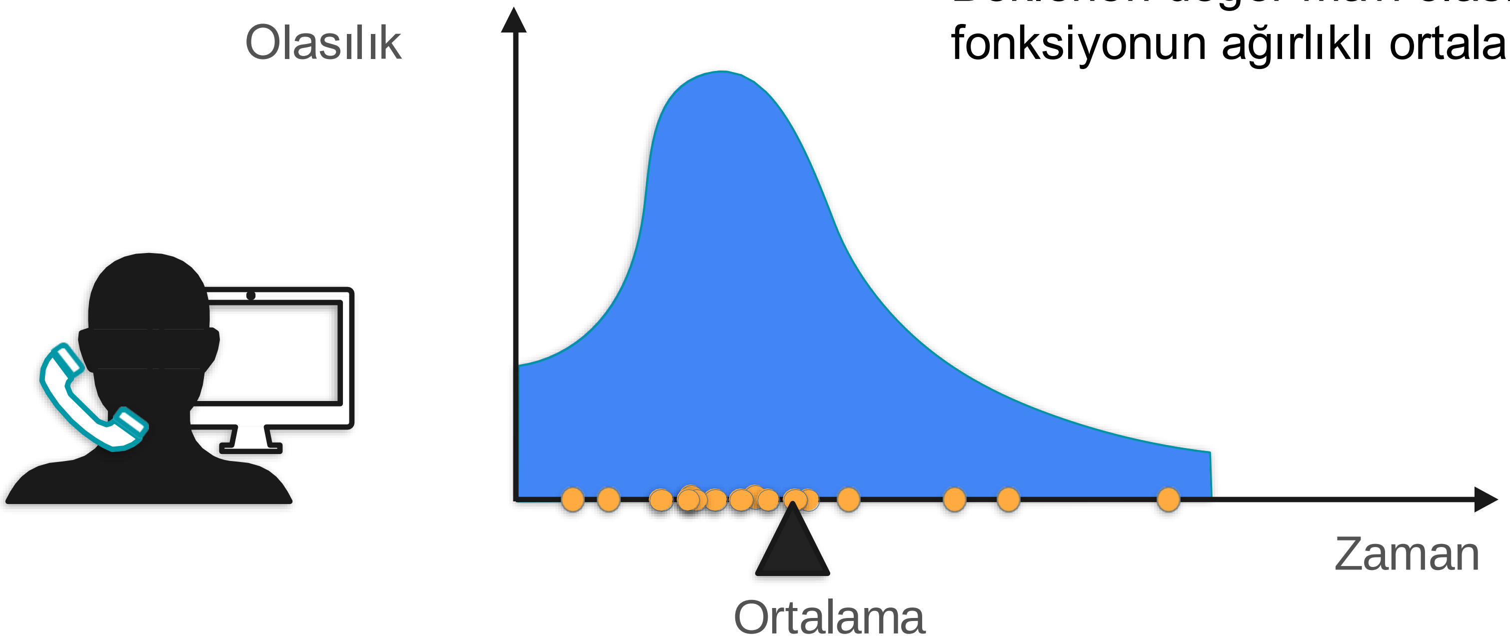
Beklenen Değer: Düzgün Dağılım

Ortalama = $\frac{a + b}{2}$

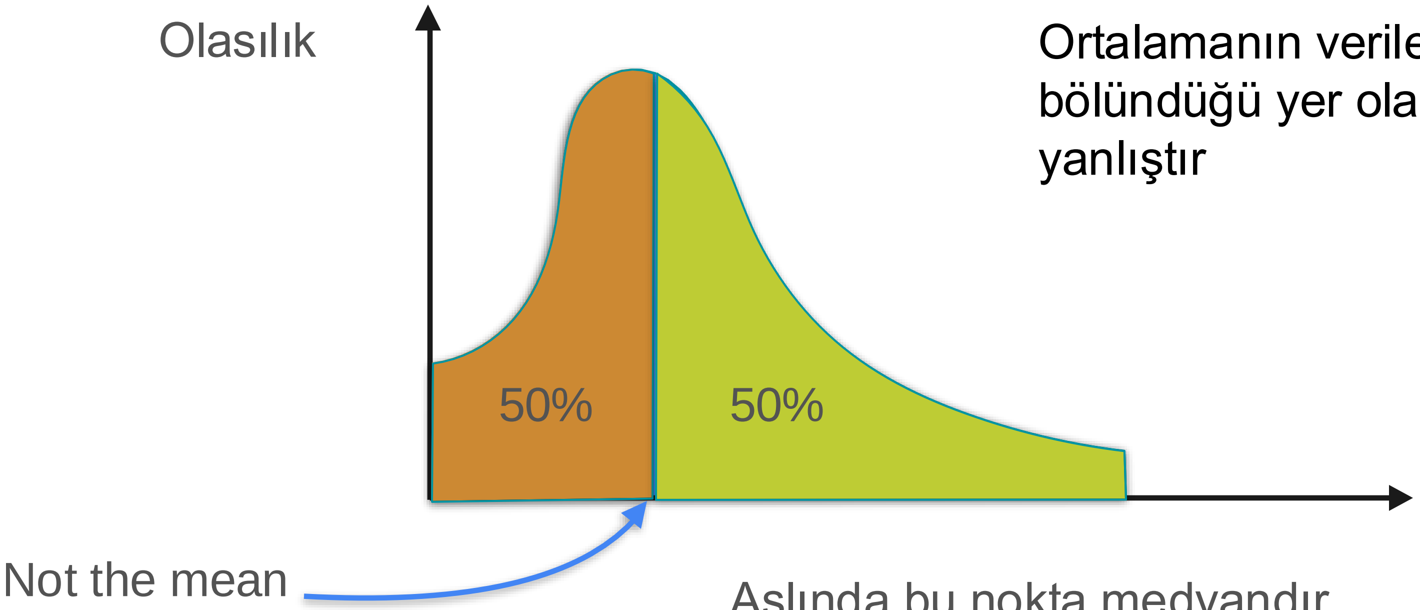


Beklenen Değer

Beklenen değer mavi olasılık yoğunluk fonksiyonun ağırlıklı ortalamasıdır



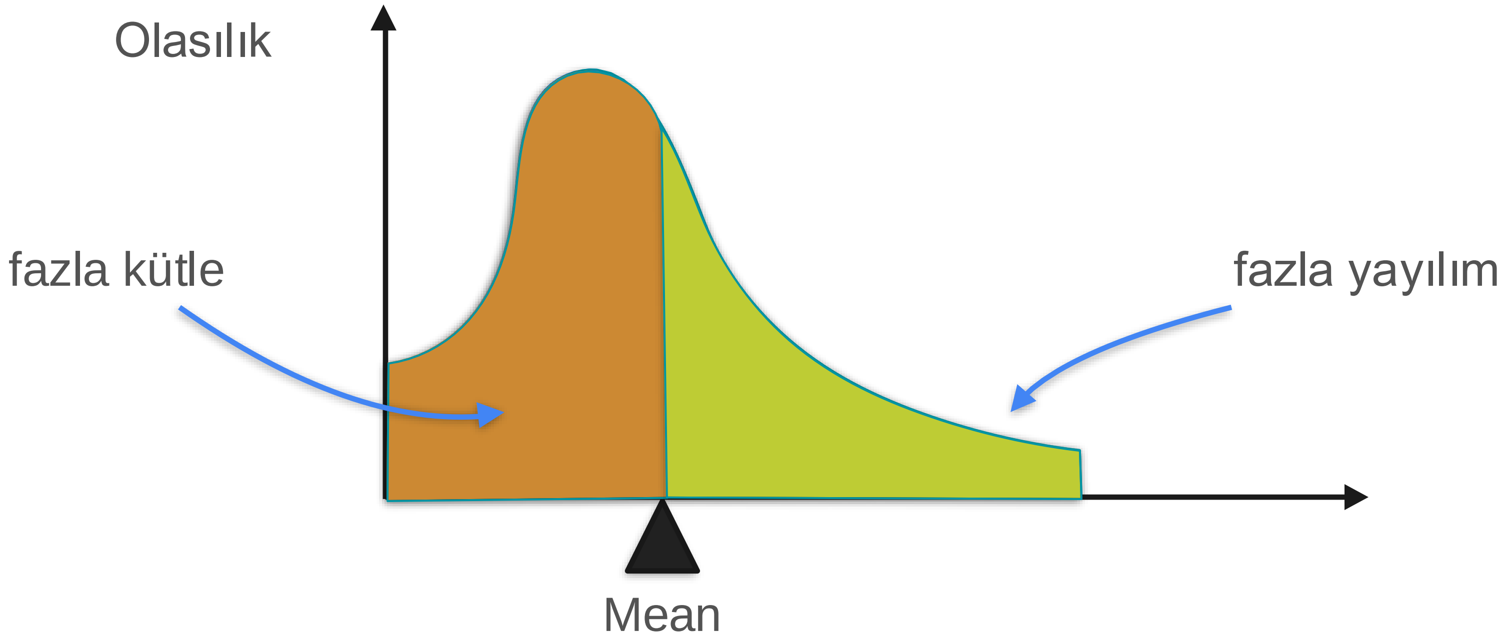
Beklenen Değer: Yaygın Bilinen Yanlış



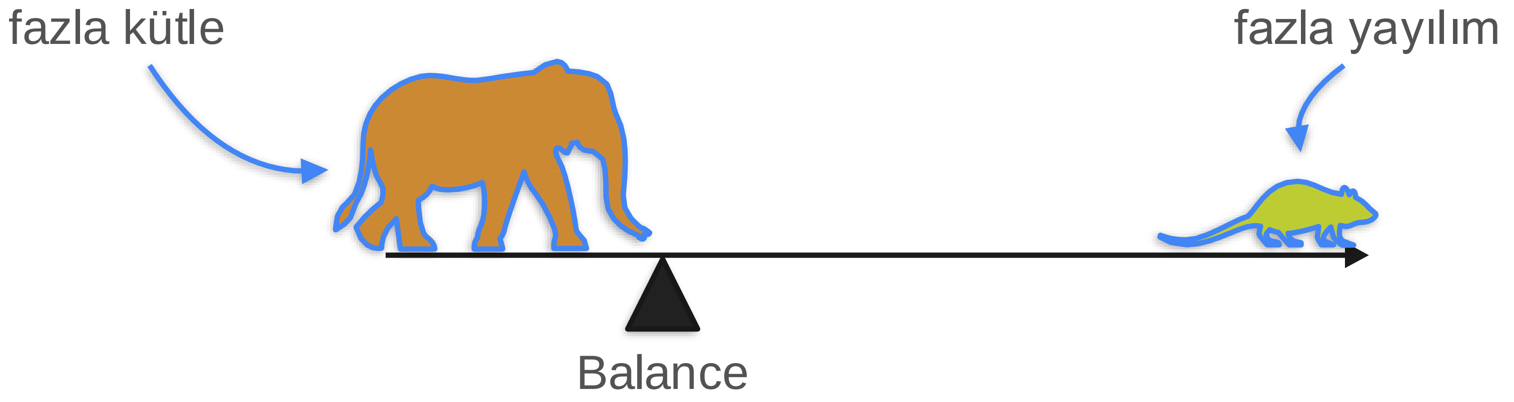
Ortalamanın verilerin ikiye bölündüğü yer olarak düşünmek yanlıştır

Aslında bu nokta medyandır

Beklenen Değer: Yaygın Bilinen Yanlış



Beklenen Değer: Yaygın Bilinen Yanlış



DeepLearning.AI

Beklenen Değer

- $\mathbb{E}[X]$
- Mean (Ortalama) / Balancing point (Denge noktası)
- Defined for discrete and continuous random variables
- (Ayrık ve Sürekli r.d. için tanımlanır)
- Weighted average of the PMF / PDF
- (PMF veya PDF'nin ağırlıklı ortalamasıdır)

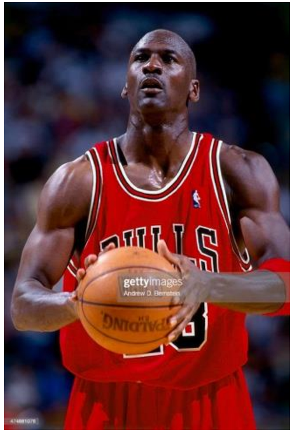
DeepLearning.AI

Dağılımın Tanımları

Diğer merkezi eğilim ölçüleri

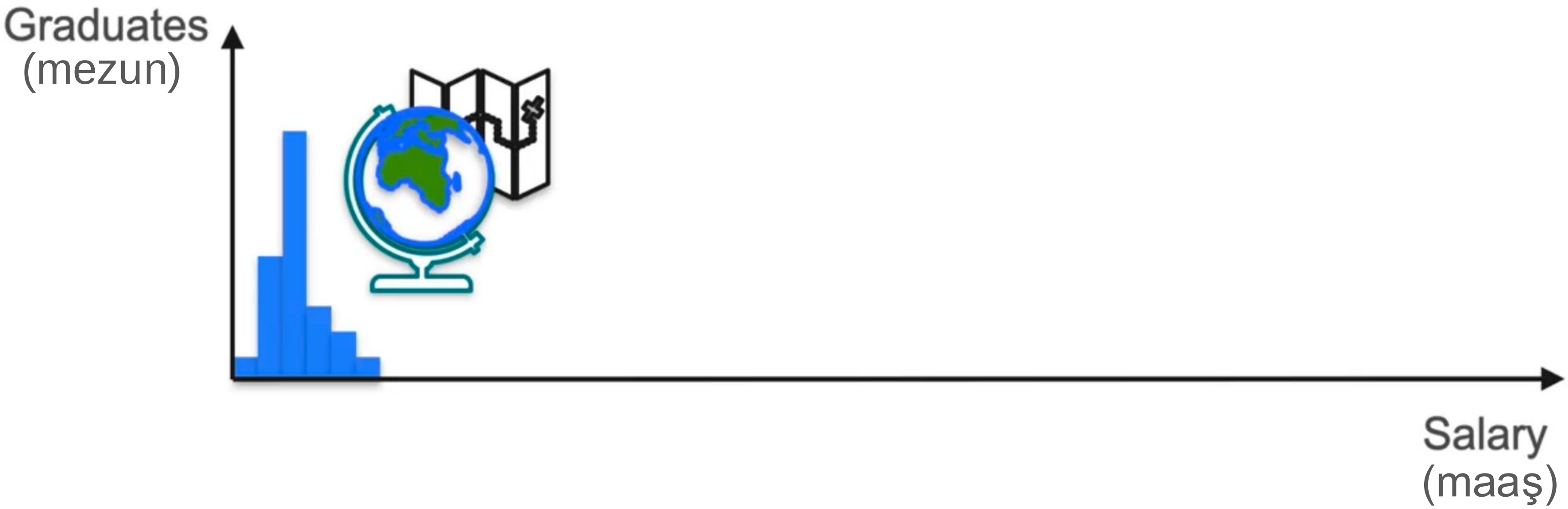
Median: Motivasyon

- 1980'lerde Kuzey Carolina Üniversitesi'ndeki bir coğrafya mezununun başlangıç maaşı 250.000 dolardı.
- Ülkenin geri kalanında bir coğrafya mezununun başlangıç maaşı 22.000 dolardı.
- Neden?
    1. Program gerçekten çok iyiydi (Hayır)
    2. Üniversitenin harika bağlantıları vardı (Hayır)
    3. Bir öğrenci çok para kazandı (Michael Jordan)



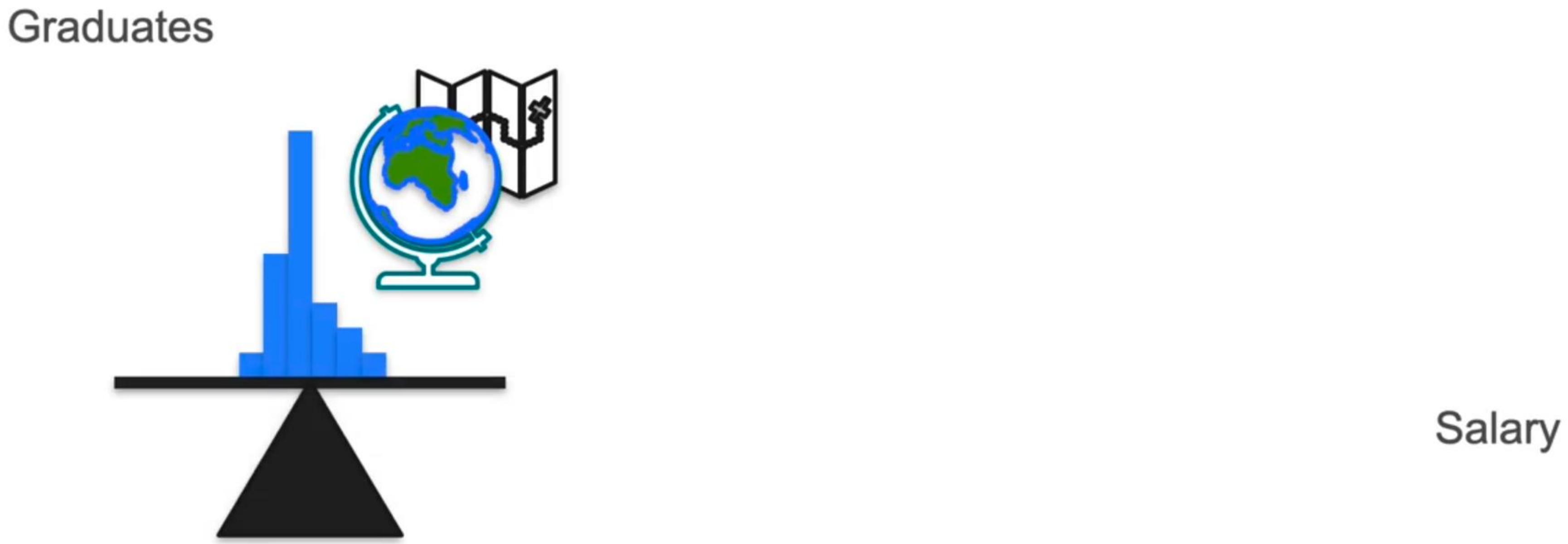
Michael Jordan

Aykırı Değer



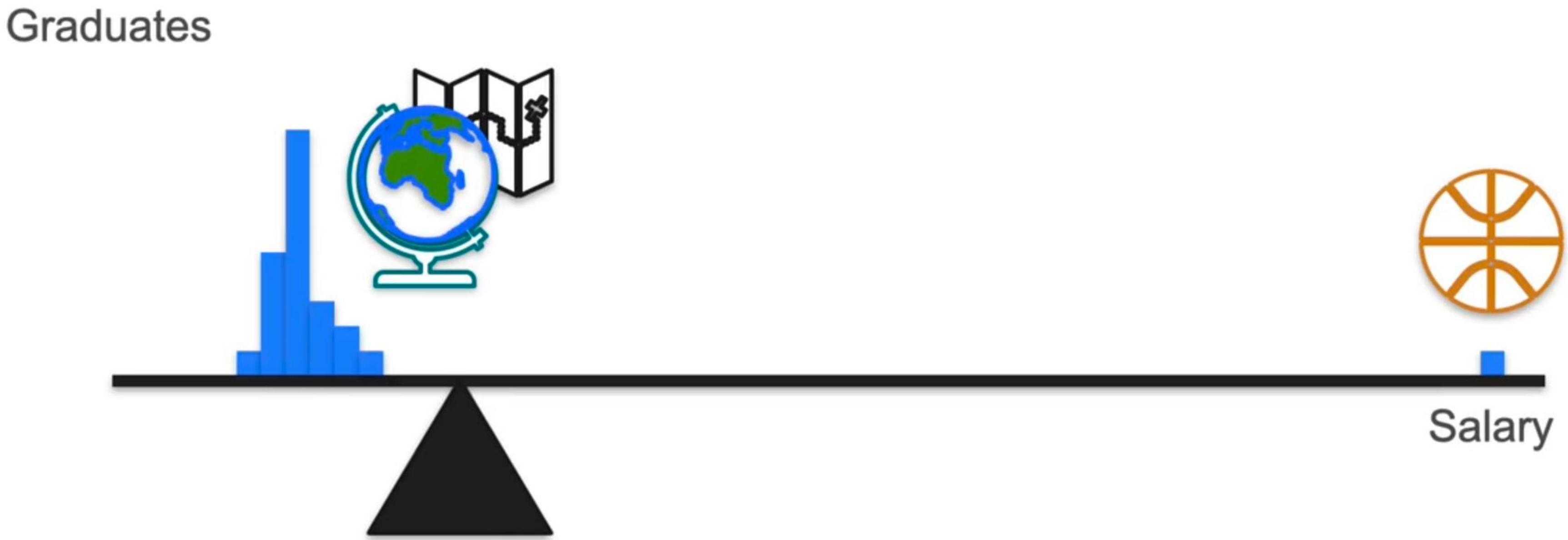
Aykırı Değer

Ortalamanın neden aldatıcı bilgi verdiğine dair bir örnek



Aykırı Değer

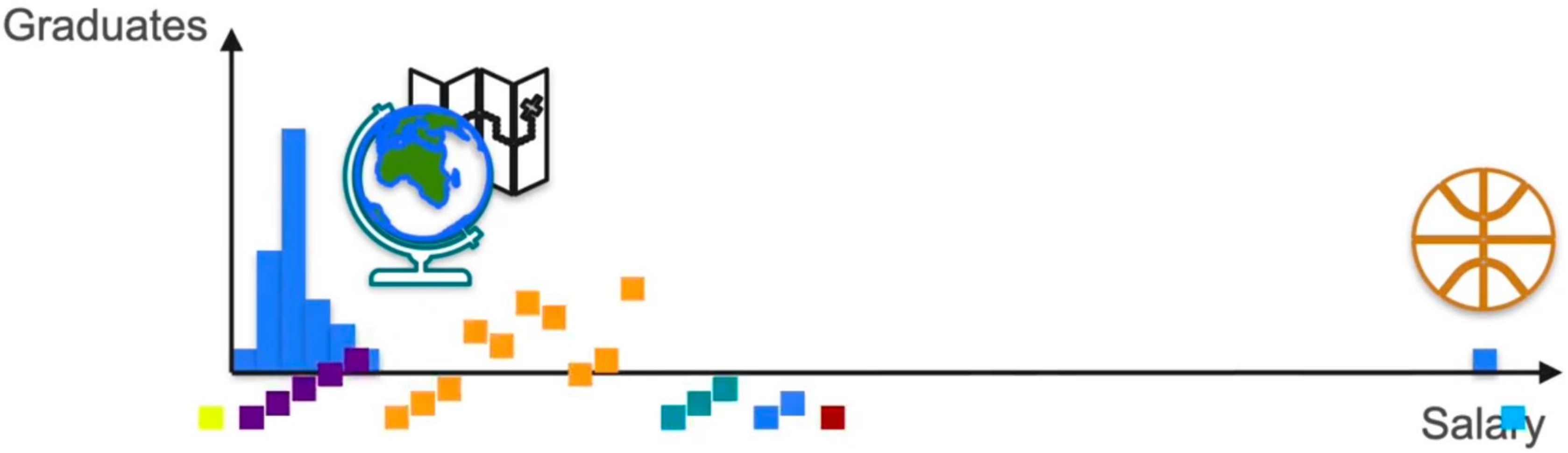
Bu durumda ortalama artık öğrencinin aylık maaşını göstermiyor. Aykırı bir değer olayı çarptırdı.
Bunu farklı bir metrikle düzeltebiliriz.



Outliers

Outliers

Outliers

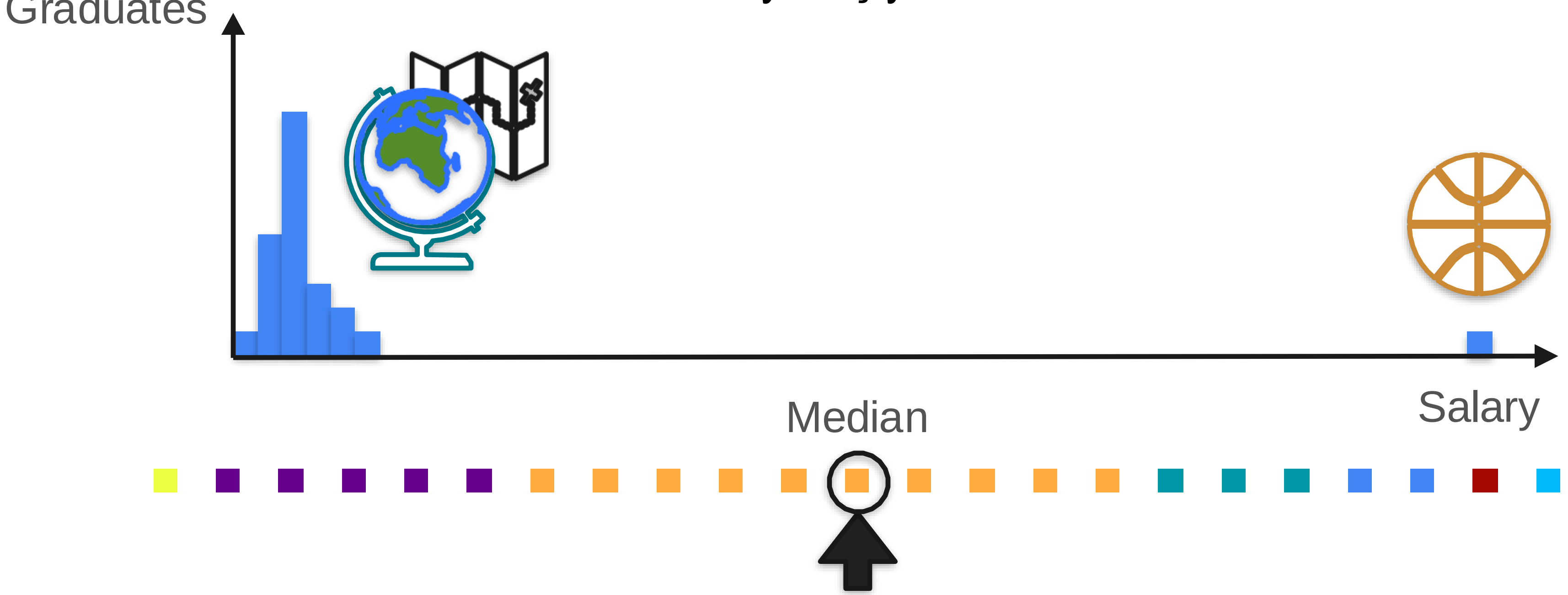


Outliers

G

Median

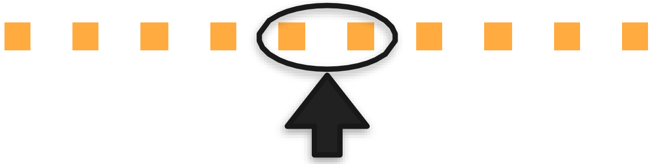
Burda önemli olan sadece konum aykırı değerlerin büyüklüğü etkilemiyor artık. Ortadaki numarayı seçiyoruz



Median

Çift sayıda eleman varsa

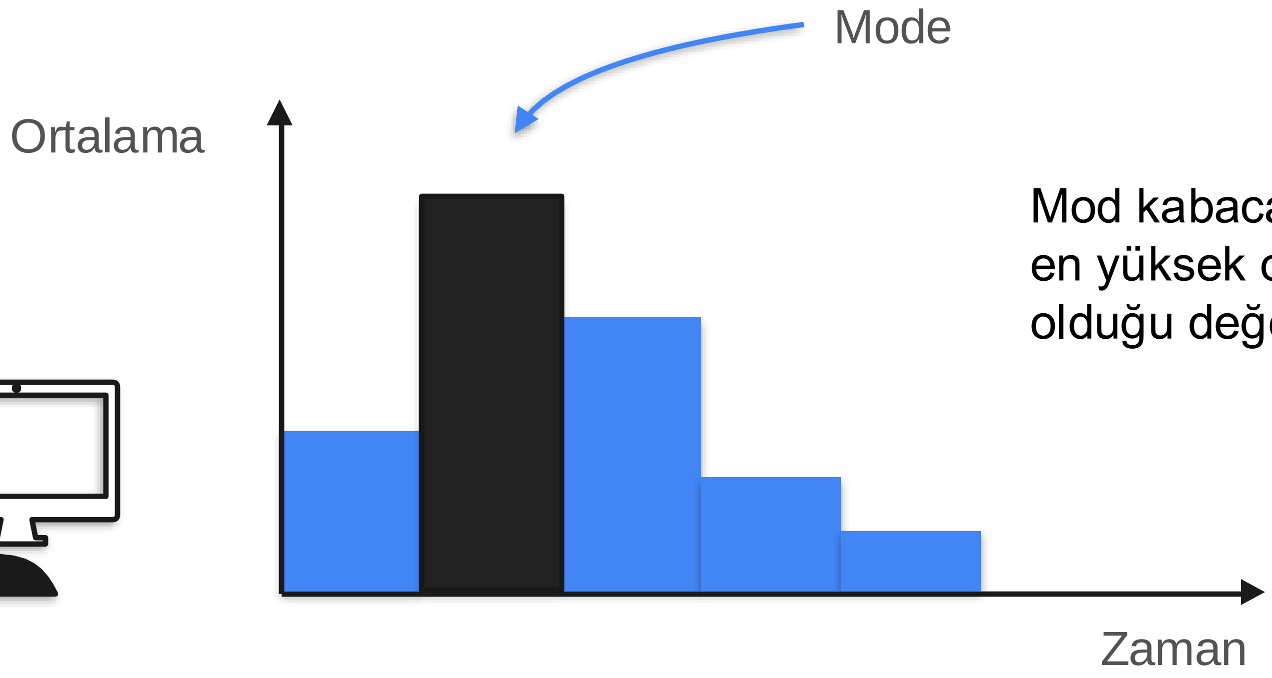
Median



Ortadaki ikinin ortalaması

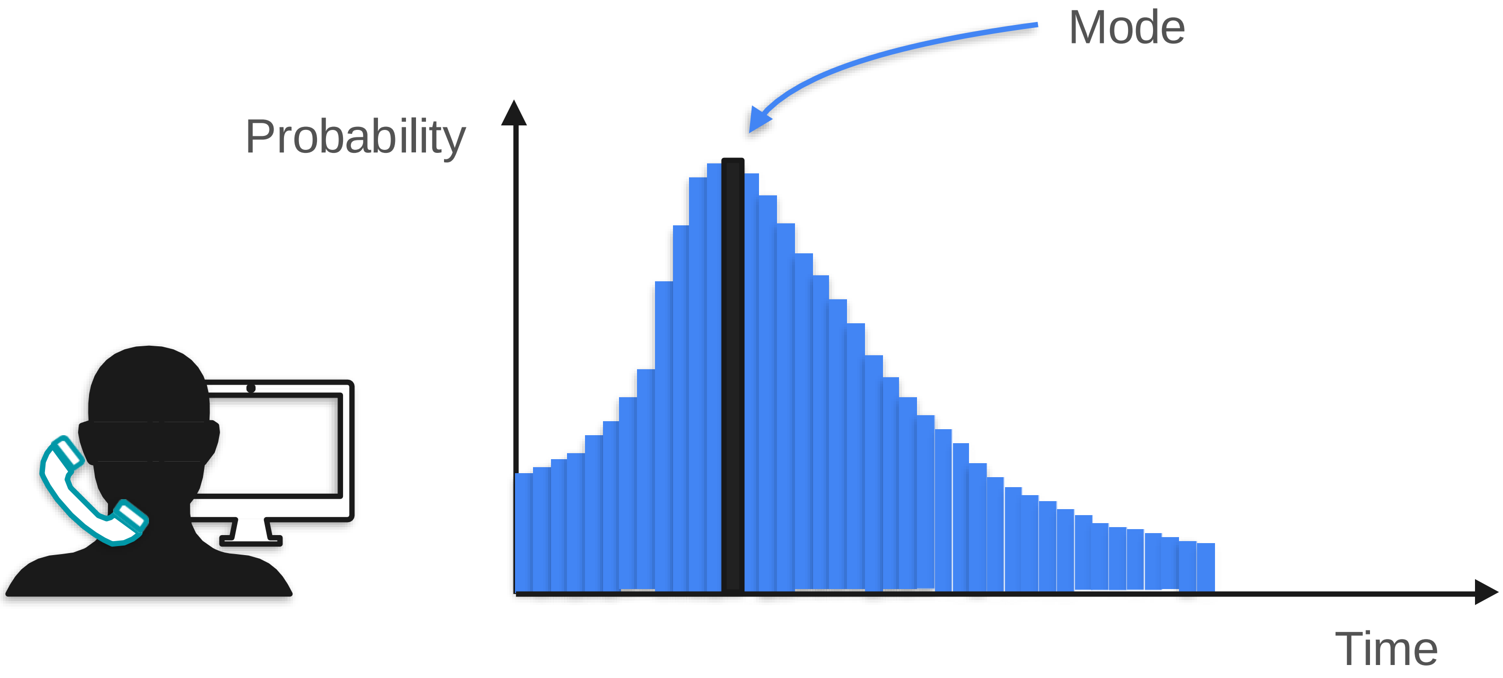
Mode

Mod: Medyan dışında bir dağılımın merkezini tanımlamanın bir diğer yoludur.

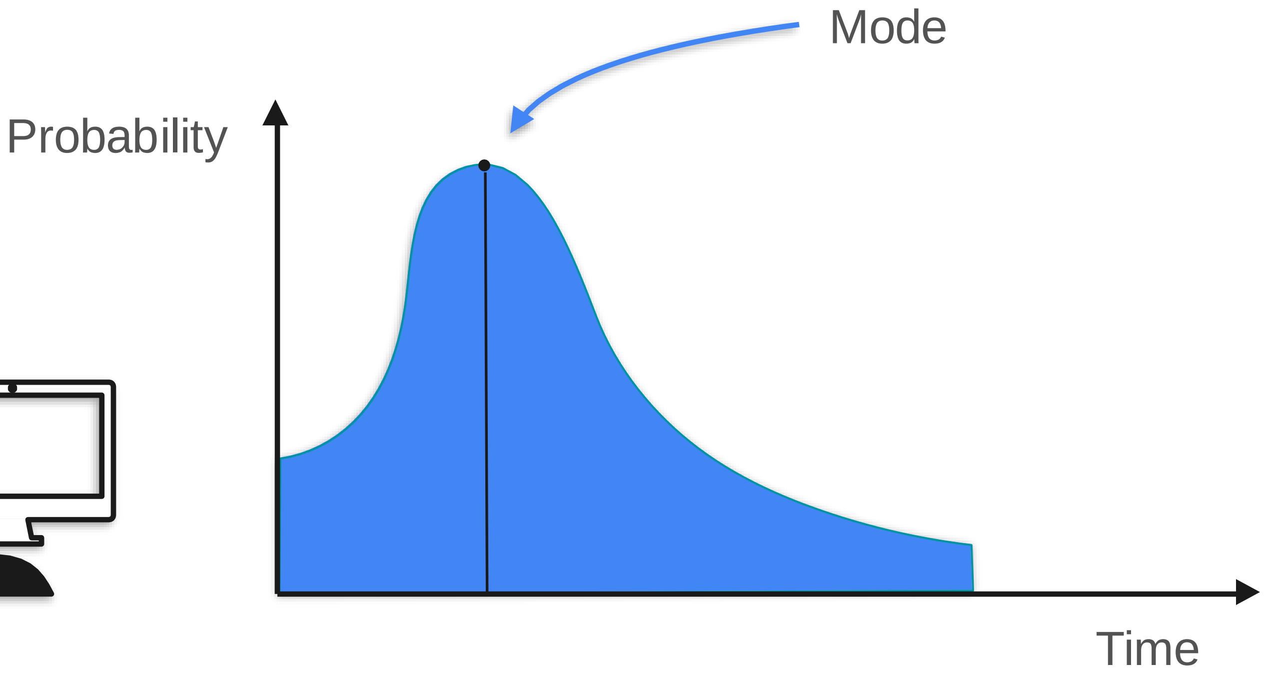


Mod kabaca bir dağılımda en yüksek olasılığa sahip olduğu değerdir.

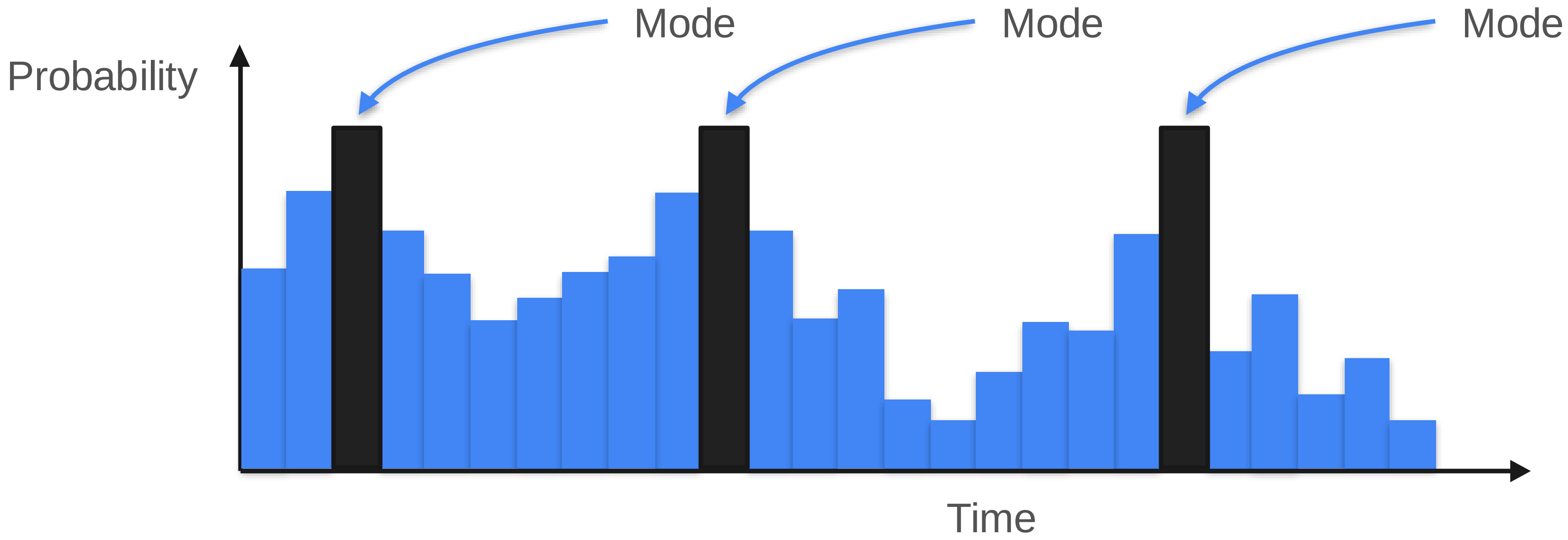
Mode



Mode



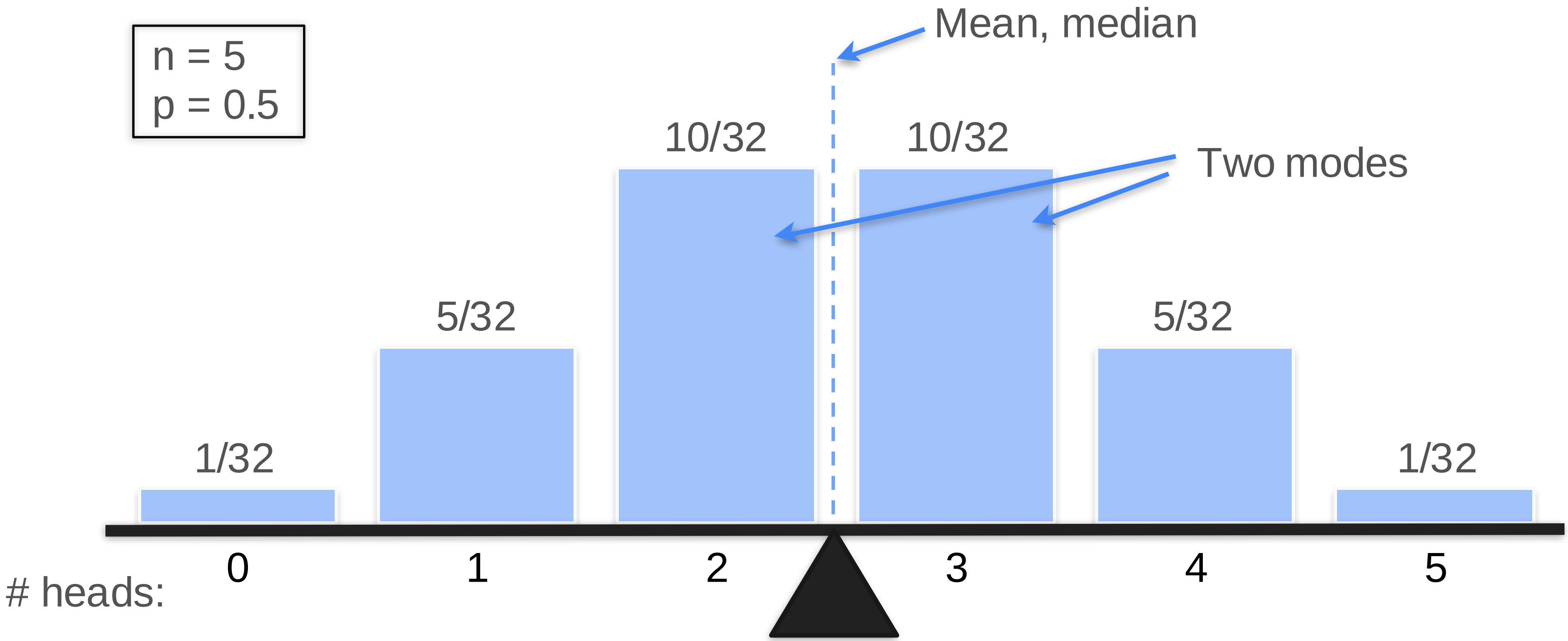
Mode: Çoklu Dağılım



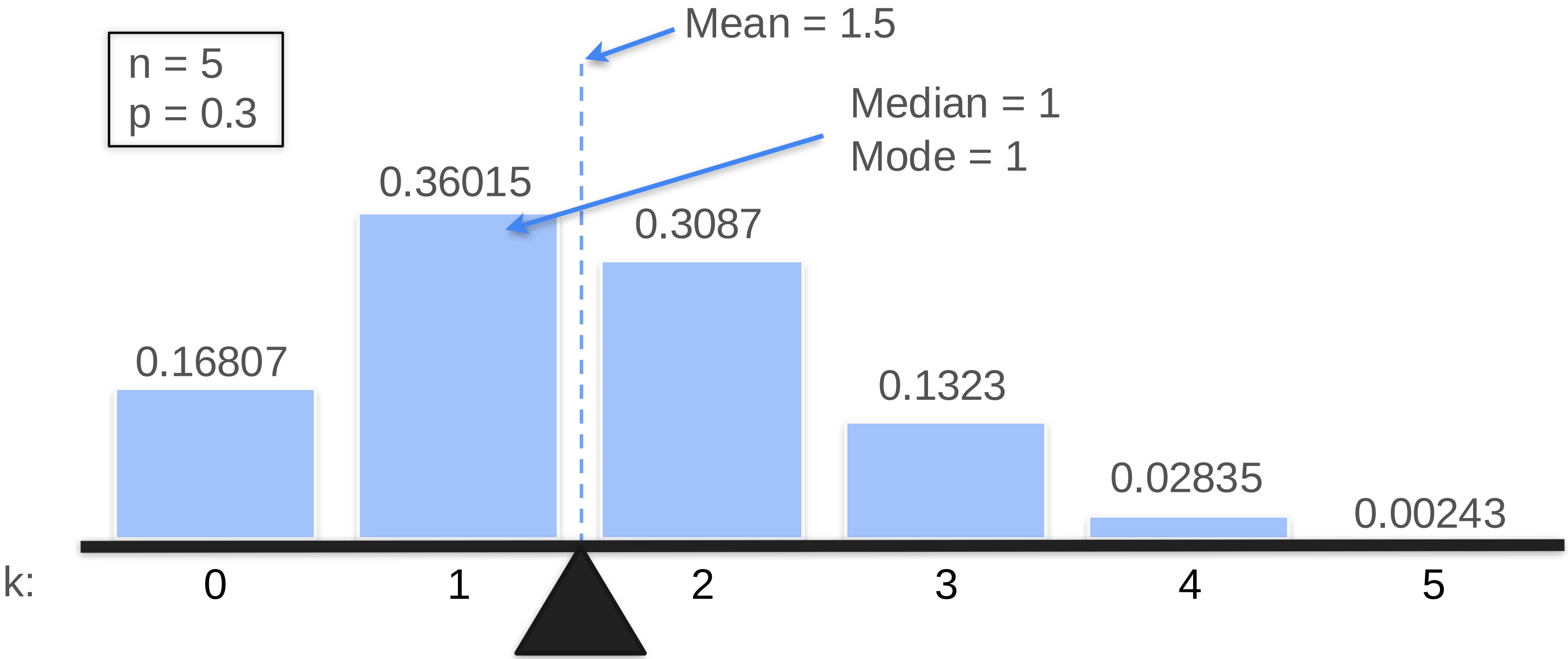
Mean, Median ve Mod hepsi dağılımın merkezini bulmada bize yardım ediyor

Beş paranın atılma deneyi (head = 0.5). Ortalama = 2.5 (80/32), Median = (2+3)/2=2.5.   Mod = 2 ve 3

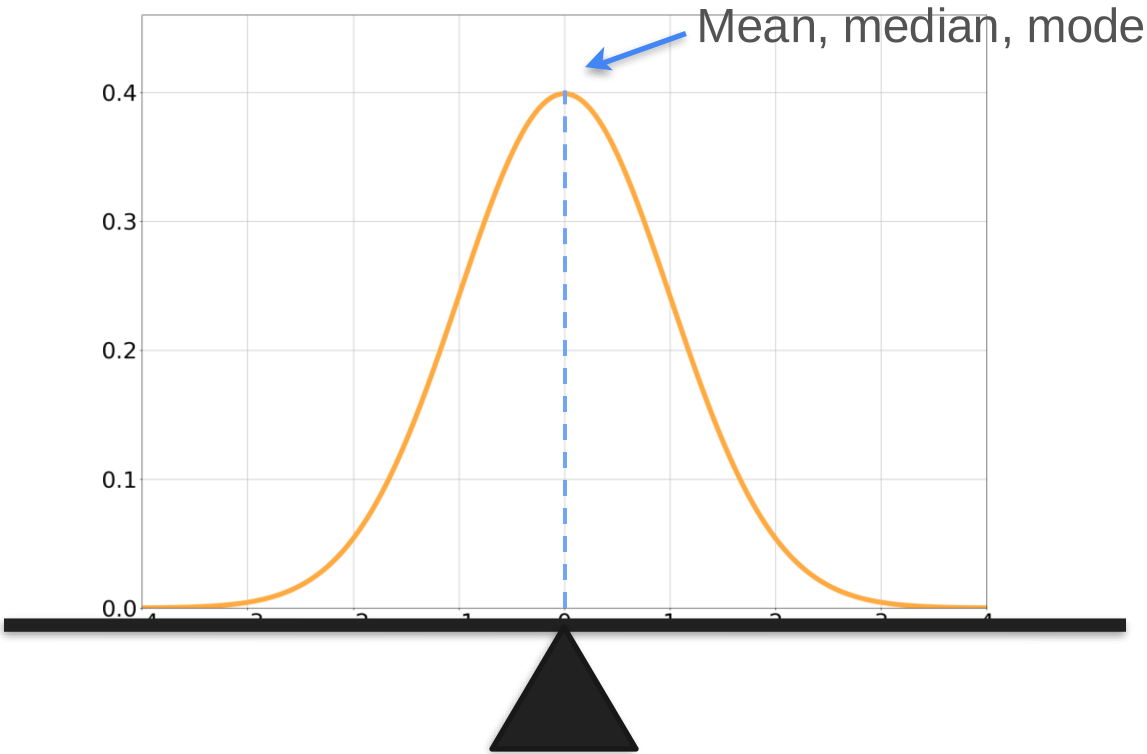
Mean, Median ve Mode: Binom Dağılımı



Mean, Median ve Mode: Binom Dağılımı



Mean, Median and Mode: Normal Dağılım



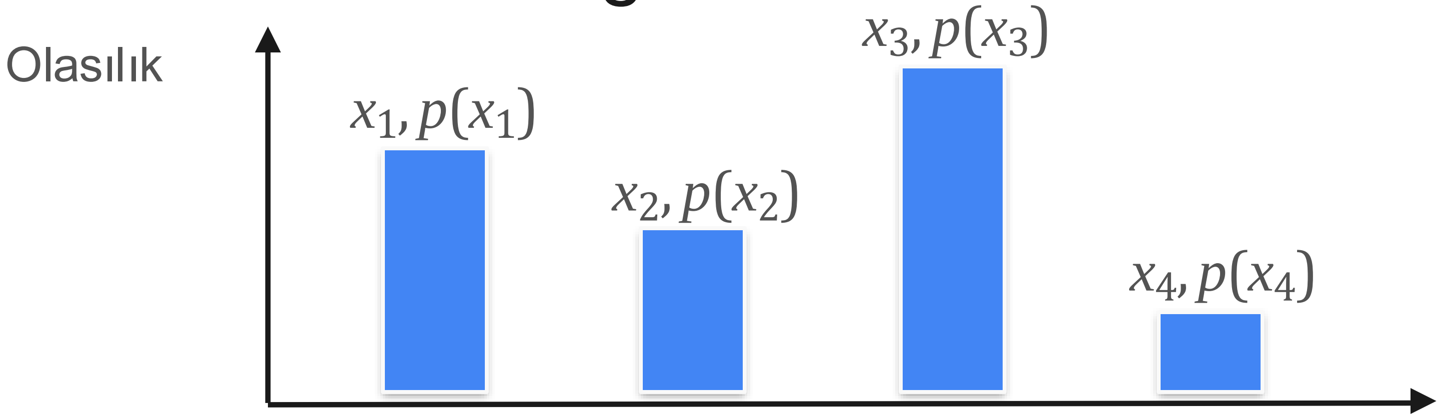
DeepLearning.AI

DeepLearning.AI

Dağılımın Tanımları

Fonksiyonun Beklenen Değeri

Fonksiyonun Beklenen Değeri

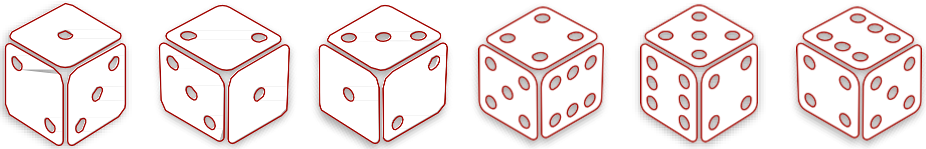


$$\mathbb{E}[X] = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + x_3 p(x_3) + x_4 p(x_4)$$

$$E[g(X)] = g(x_1)p(x_1) + g(x_2)p(x_2) + g(x_3)p(x_3) + g(x_4)p(x_4)$$

Fonksiyonun Beklenen Değeri

Olasılık:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Zar:	1	2	3	4	5	6

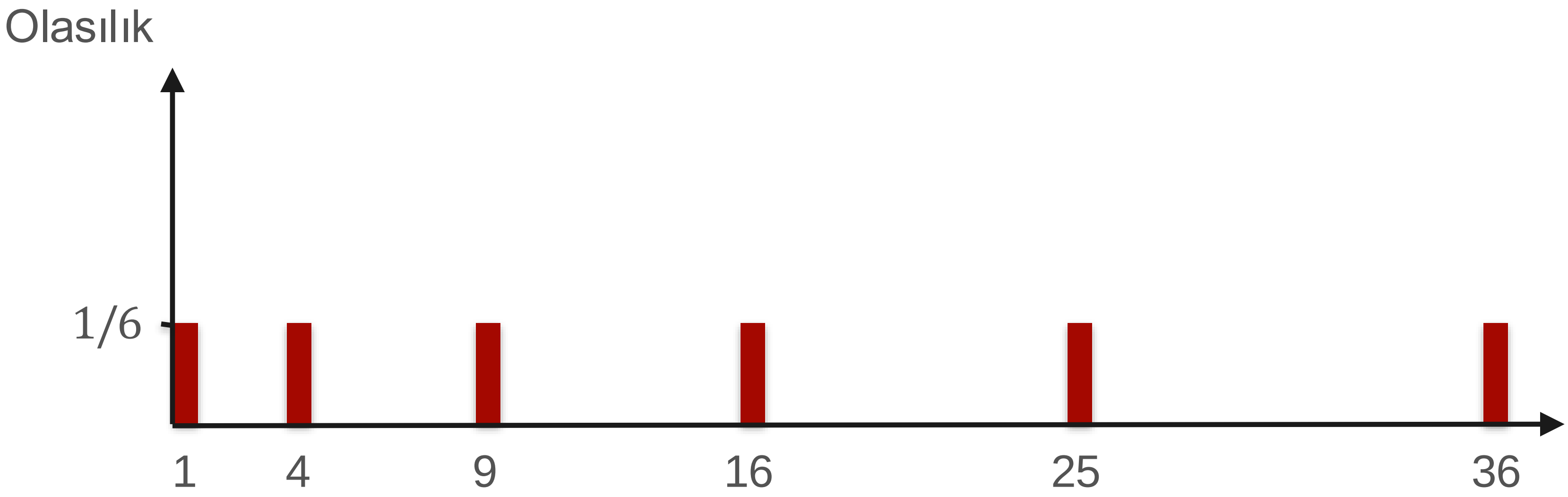


Karesi:	1	4	9	16	25	36

Bir zar atarsın ve arkadaşın
sana attığının karesini verir

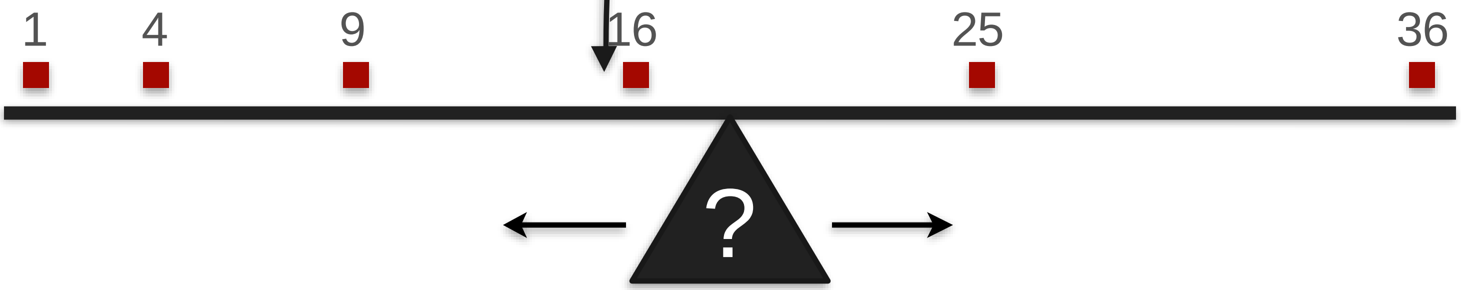
Bu oyun için ödenecek
adil fiyat nedir?

Fonksiyonun Beklenen Değeri



Fonksiyonun Beklenen Değeri

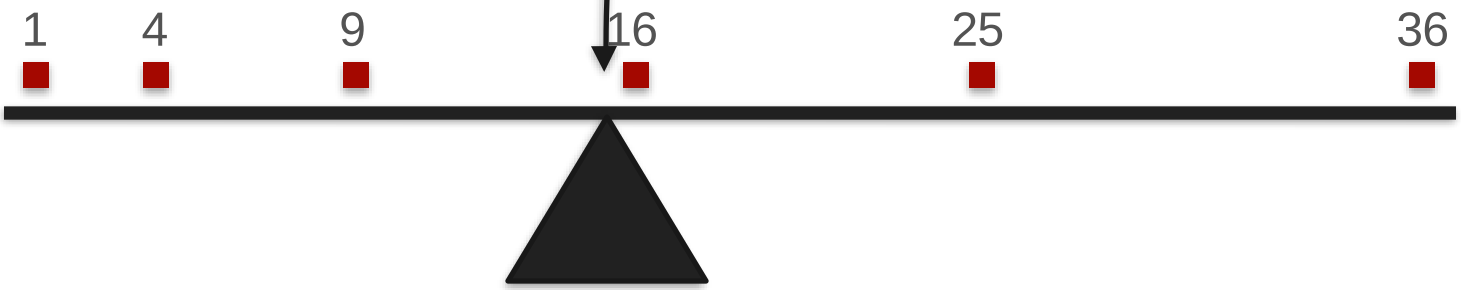
$$\frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6}$$



Fonksiyonun Beklenen Değeri

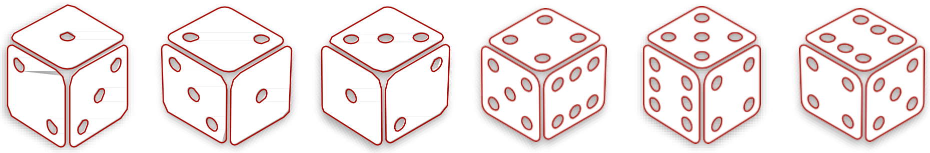
$$\frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6} = \frac{1^2}{6} + \frac{2^2}{6} + \frac{3^2}{6} + \frac{4^2}{6} + \frac{5^2}{6} + \frac{6^2}{6}$$

$$= \mathbb{E}\left[X^2\right]$$



Doğrusal Fonksiyonun Beklenen Değeri

Olasılık:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Zar:	1	2	3	4	5	6



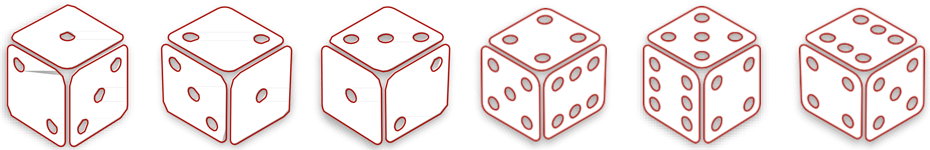
İki katı:	2	4	6	8	10	12
Kazanç	2 - 5	4 - 5	6 - 5	8 - 5	10 - 5	12 - 5

Oyuna girmek için
5 dolar veriyorsunuz

Oyun değişti, arkadaşın sana attığının iki katını verir.

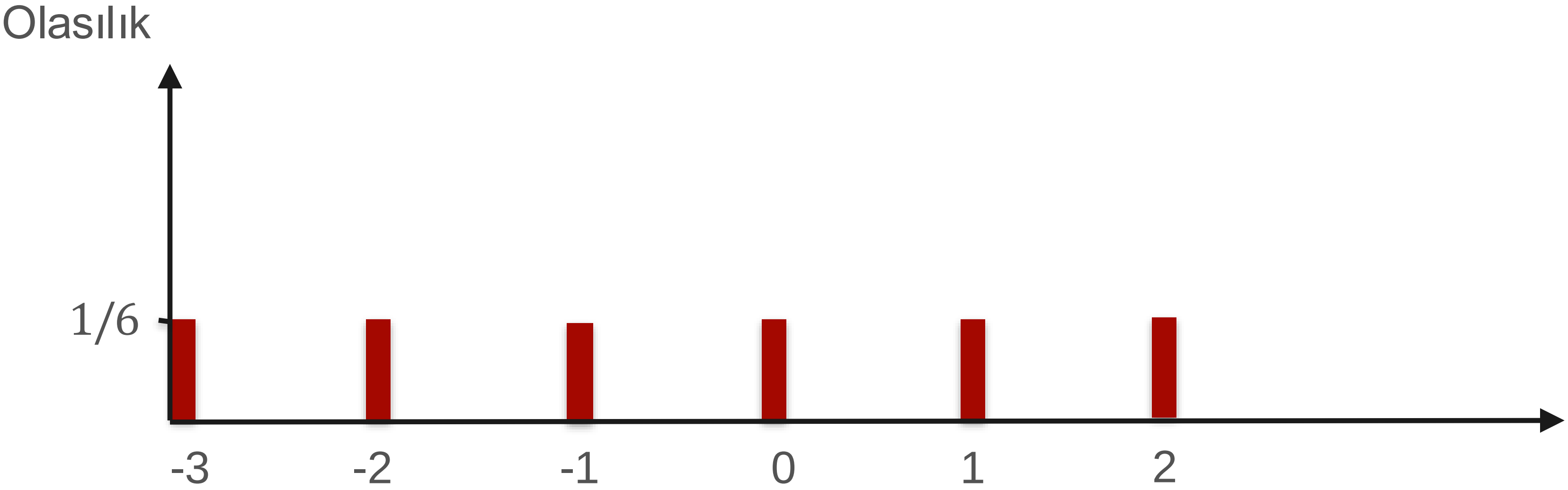
Doğrusal Fonksiyonun Beklenen Değeri

Olasılık:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Zar:	1	2	3	4	5	6



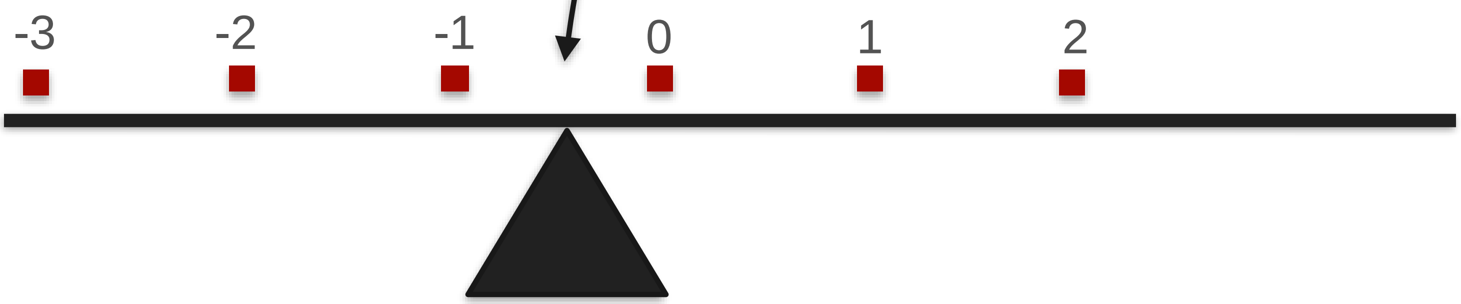
İki kat:	2	4	6	8	10	12
Kazanç	-3	-2	-1	0	1	2

Fonksiyonun Beklenen Değeri



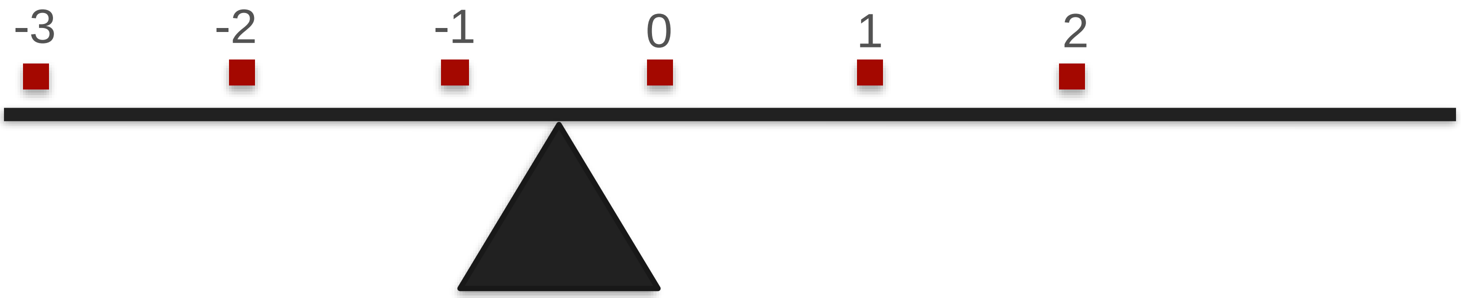
Fonksiyonun Beklenen Değeri

$$\frac{-3 + -2 + -1 + 0 + 1 + 2}{6} = \frac{-3}{6} = -\ 0.5$$



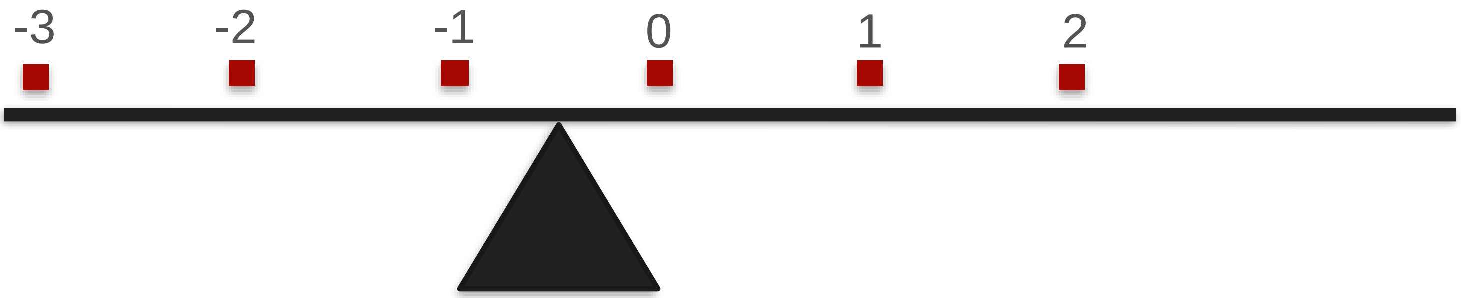
Fonksiyonun Beklenen Değeri

$$\frac{(2\cdot 1-5)+(2\cdot 2-5)+(2\cdot 3-5)+(2\cdot 4-5)+(2\cdot 5-5)+(2\cdot 6-5)}{6}=\frac{-3}{6}=-0.5$$



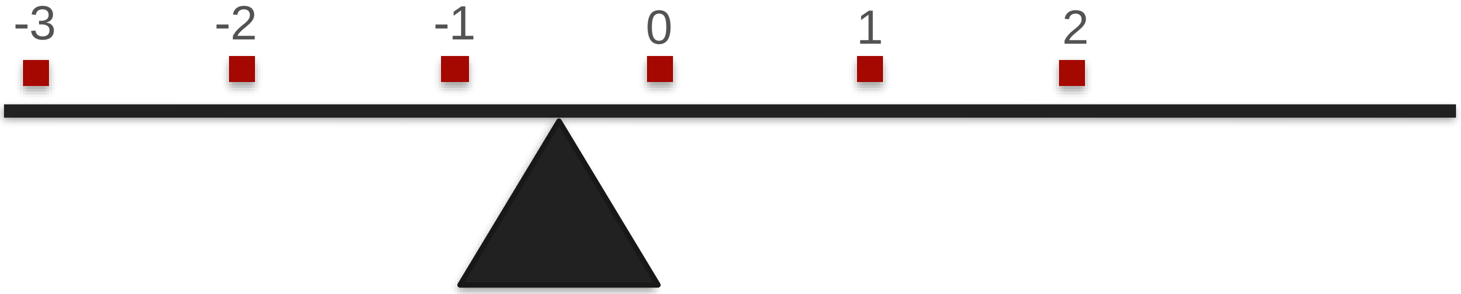
Fonksiyonun Beklenen Değeri

$$\frac{(2\cdot 1)+(2\cdot 2)+(2\cdot 3)+(2\cdot 4)+(2\cdot 5)+(2\cdot 6)+6\cdot(-5)}{6}=\frac{-3}{6}=-0.5$$



Fonksiyonun Beklenen Değeri

$$\frac{(2\cdot 1)+(2\cdot 2)+(2\cdot 3)+(2\cdot 4)+(2\cdot 5)+(2\cdot 6)}{6}+(-5)=\frac{-3}{6}=-\ 0.5$$



Beklenen değer doğrusal bir operatördür.

Fonksiyonun Beklenen Değeri

$$\mathbb{E}[2 \cdot X + (-5)] = \frac{2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)}{6} + (-5) = \frac{-3}{6} = -0.5$$

$\mathbb{E}[X]$

$$= 2 \cdot \mathbb{E}[X] + (-5)$$

In general:

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

$$\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[b] = b$$

DeepLearning.AI

Dağılımın Tanımları

Beklenen Değerlerin Toplamı

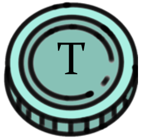
Beklenen Değerlerin Toplamı

Oyun şu şekilde:

Yazı - tura. Eğer tura gelirse 1$ kazanırsınız, aksi takdirde hiçbir şey kazanamazsınız.

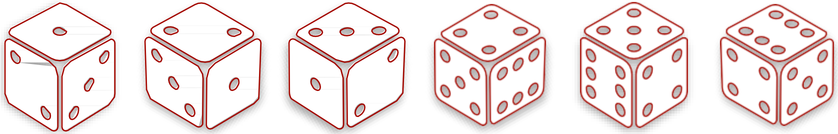
Daha sonra bir zar atın. Attığınız miktar kadar kazanırsınız.

Kazanç $1



Hiçbirşey

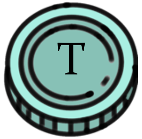
Kazanç $1 $2 $3 $4 $5 $6



Kazanılacak miktarın beklenen değeri nedir?

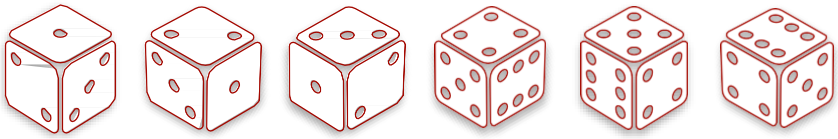
Beklenen Değerlerin Toplamı

Win $1



Win nothing

Win $1 $2 $3 $4 $5 $6



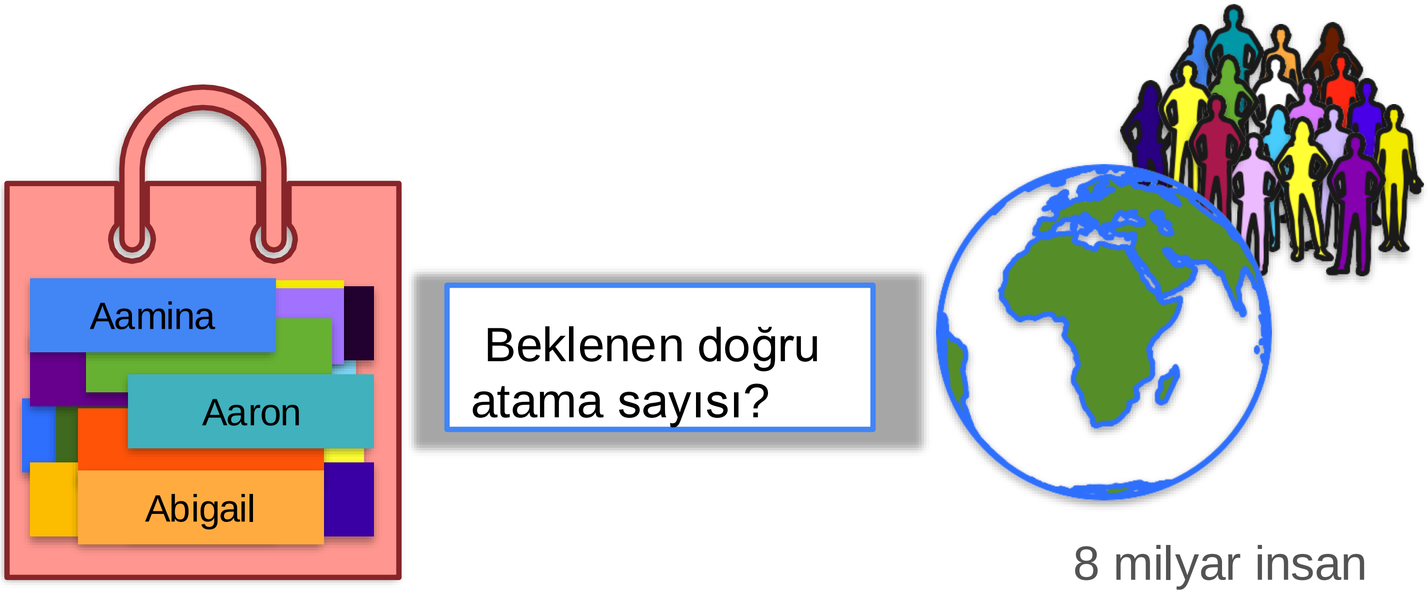
$\mathbb{E}[X_{coin}] = \$0.5$

$\mathbb{E}[X_{dice}] = \$3.5$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_{coin}] + \mathbb{E}[X_{dice}] = \$0.5 + \$3.5 = \$4$$

In general: $\boxed{\mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2]}$

Beklenen Değerlerin Toplamı



Tüm dünyada insanlara karşılık gelen isimler var. 8 milyar insan olduğuna göre çantada 8 milyar isim var. Bunların benzersiz olduğunu düşünelim. Her küçük isim kağıt parçası dünyayı dolaştırılarak birine veriliyor. Dünya dolaşılacak ve bu çantadan seçilen bir kağıt birine verilecek. Bu şekilde tüm kağıtlar tüm insanlara dağıtılacak. Beklenen doğru atama sayısı? Beklenen kendi ismini alacak insan saysı nedir?

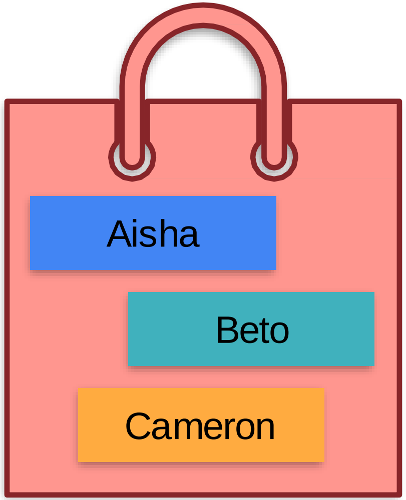
Beklenen Değerlerin Toplamı

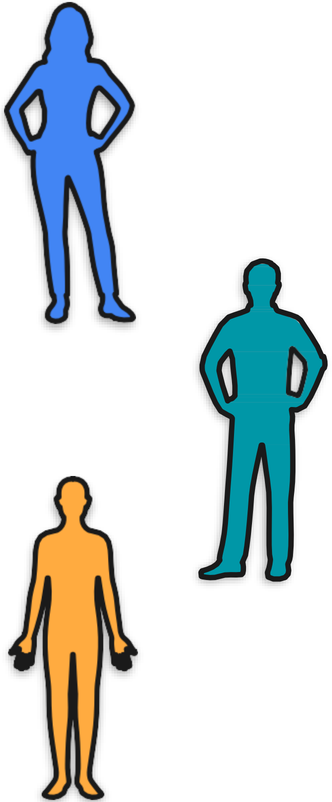
1

Beklenen doğru atama sayısı 1 dir

8 milyar insan

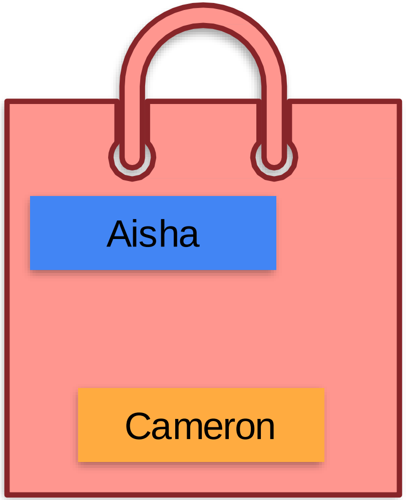
Beklenen Değerlerin Toplamı

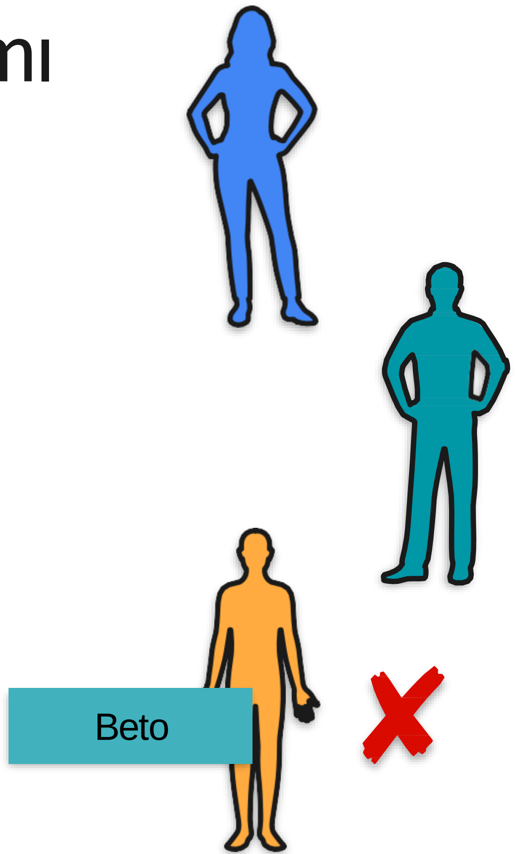




Çantada 3 isim ve dışarda 3 kişi var. İsimleri üçüne vermeye çalışacağız.

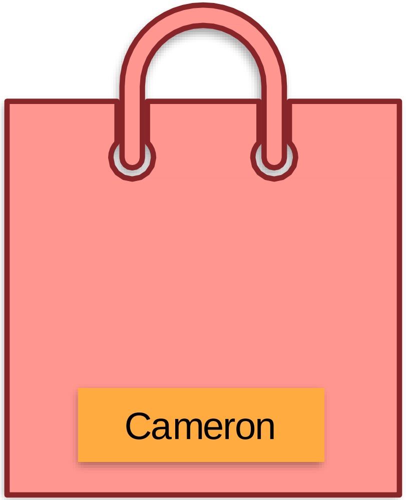
Beklenen Değerlerin Toplamı

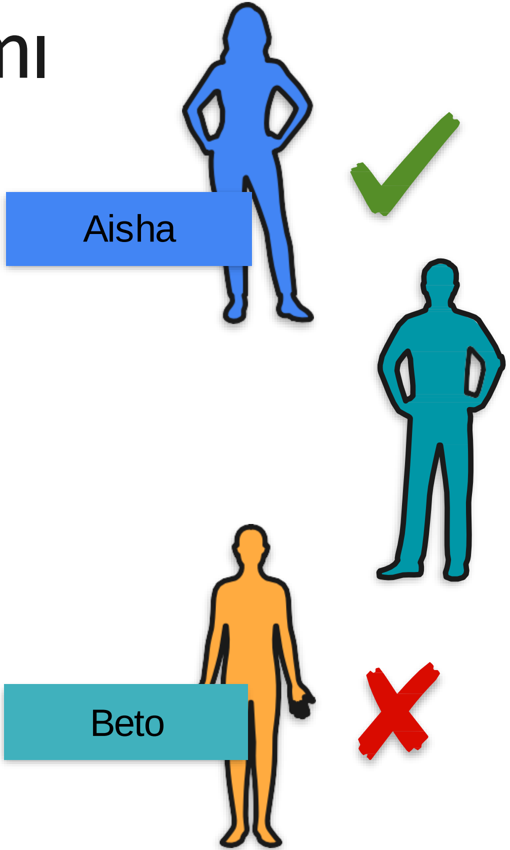




Turunculuya Beto verildi aslında adı Cameron’du

Beklenen Değerlerin Toplamı

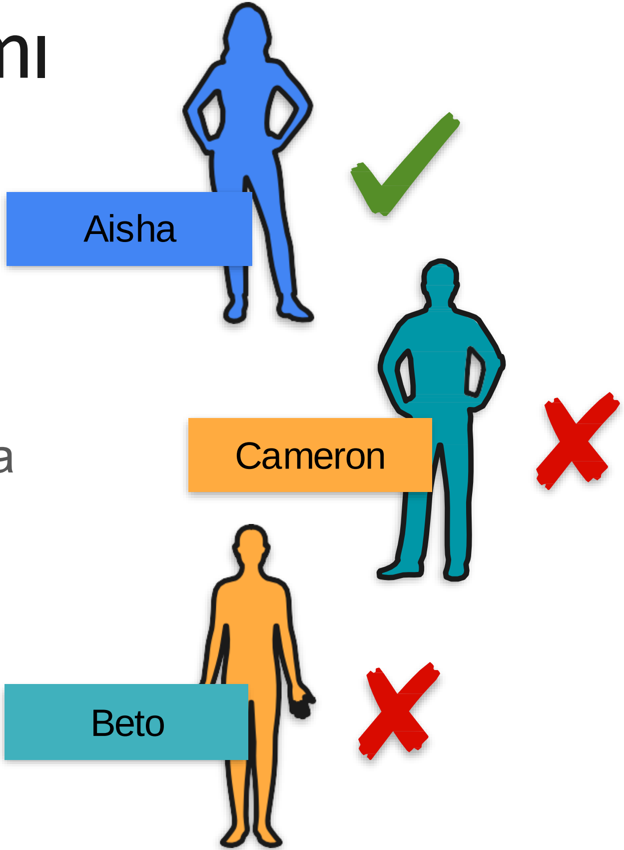




Aisha ya Aisha gitsin

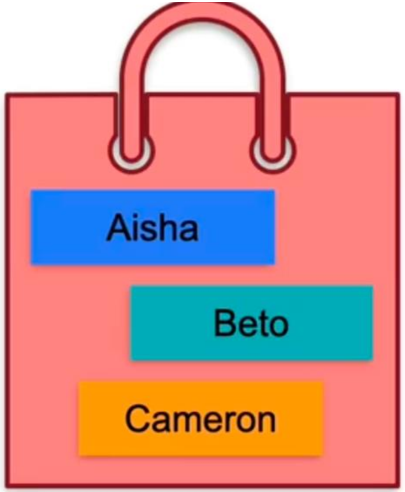
Beklenen Değerlerin Toplamı

1 doğru 2 hata



Betoya da Cameron gitti hata. 1 doğru 2 hata

Beklenen Değerlerin Toplamı



Oyunu bir çok kez oynayalım

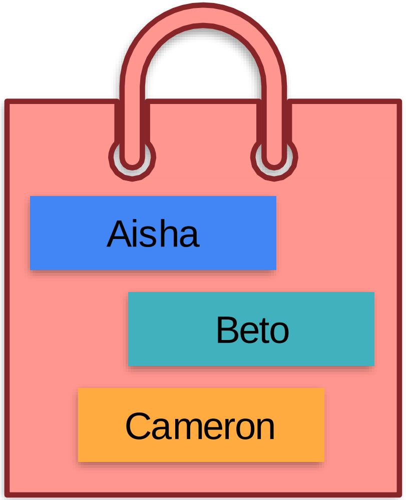
Doğru			
3	Aisha	Beto	Cameron
1	Aisha	Cameron	Beto
1	Beto	Aisha	Cameron
0	Beto	Cameron	Aisha
0	Cameron	Aisha	Beto
1	Cameron	Beto	Aisha

3 isim 3 kişiye 6 farklı yolla verilebilir. 6 doğru olduğundan ortalama 6/6 = 1 dir.

Bunu 8 milyar için yapabiliriz ama hesaplaması oldukça zor. Ancak farklı bir şey deneyelim, beklentilerin toplamını kullancağız.

Beklenen Değerlerin Toplamı

Ortalama
1

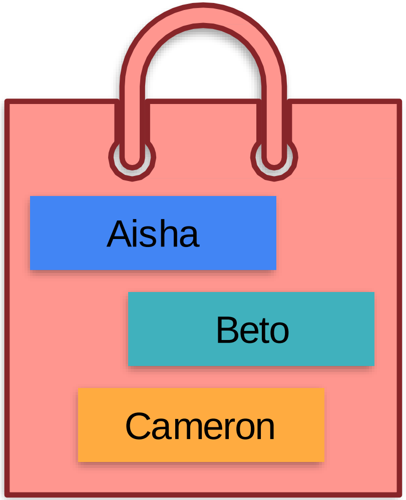


Doğru			
3	Aisha	Beto	Cameron
1	Aisha	Cameron	Beto
1	Beto	Aisha	Cameron
0	Beto	Cameron	Aisha
0	Cameron	Aisha	Beto
1	Cameron	Beto	Aisha

6

Oyunu bir çok kez oynayalım

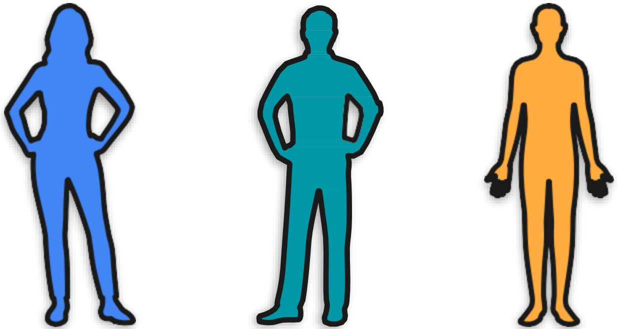
Beklenen Değerlerin Toplamı



1/3 Aisha

1/3 Beto

1/3 Cameron



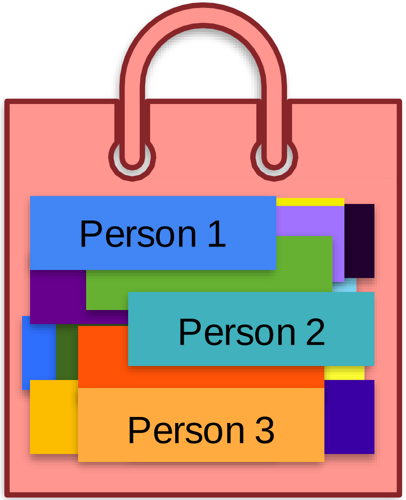
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{Matches}] &= \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[C] \\
&= 1/3 + 1/3 + 1/3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ortalama
1

Eşleşme sayısını sayan rastgele bir değişken kullanalım.
A Aisha için beklenen doğru atama sayısını göstersin.
Aisha'ya olası üç isim verilebileceği için her isim ona 1/3 olasılıkla verilir.
Bu oyun her oynandığında doğru eşleştirme 1/3 olasılıkla yapılıyor.

Beklenen Değerlerin Toplamı

Beklenen Değer = ?



8 milyar insan

Beklenen Değerlerin Toplamı

n people (n = 8 billion)

$$\mathbb{E}\left[\text{Matches}\right] = \mathbb{E}\left[X_{\text{person}_1}\right] + \mathbb{E}\left[X_{\text{person}_2}\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[X_{\text{person}_n}\right] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

In general:

$$\mathbb{E}\left[X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] + \mathbb{E}\left[X_2\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[X_n\right]$$

DeepLearning.AI

Dağılımın Tanımları

Varyans

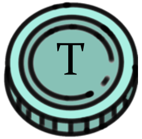
Beklenen değer bize bir çok bilgi verir ama eksiktir. Bize tüm hikayeyi anlatmaz.

Örneğin iki dağılım ayı beklenen değeri verebilir ancak bunlardan biri dar diğeri geniş olabilir

Varyans Motivasyon:

Arkadaşınızla bir oyun oynuyorsunuz

1 dolar kazanıyorsun



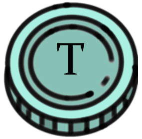
1 dolar kaybediyorsun

Bu oyunu oynamak için ödenmesi gereken mantıklı para miktarı nedir?

Varyans Motivasyon:

Arkadaşınızla bir oyun oynuyorsunuz

1 dolar kazanıyorsun



1 dolar kaybediyorsun

Oyun maliyeti:

$0

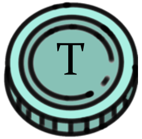
Bu oyunu oynamak için ödenmesi gereken mantıklı para miktarı nedir?

Bu oyunun beklenen değeri 0 dolardır. Yani mantıklı bir oyun değildir. Tekrar tekrar oynarsanız kazanma miktarınız 0 dolardır .

Varyans Motivasyon:

Arkadaşınızla bir oyun oynuyorsunuz

100 dolar kazanıyorsun



100 dolar kaybediyorsun

Bu oyunu oynamak için ödenmesi gereken mantıklı para miktarı nedir?

Varyans Motivasyon:

Arkadaşınızla bir oyun oynuyorsunuz

Oyun maliyeti:

100 dolar kazanıyorsu

100 dolar ka

Varyans!

0

Bu oyunun da beklenen değeri 0 dolardır.
Her ikiside aynı değere sahipse fark nedir burda?

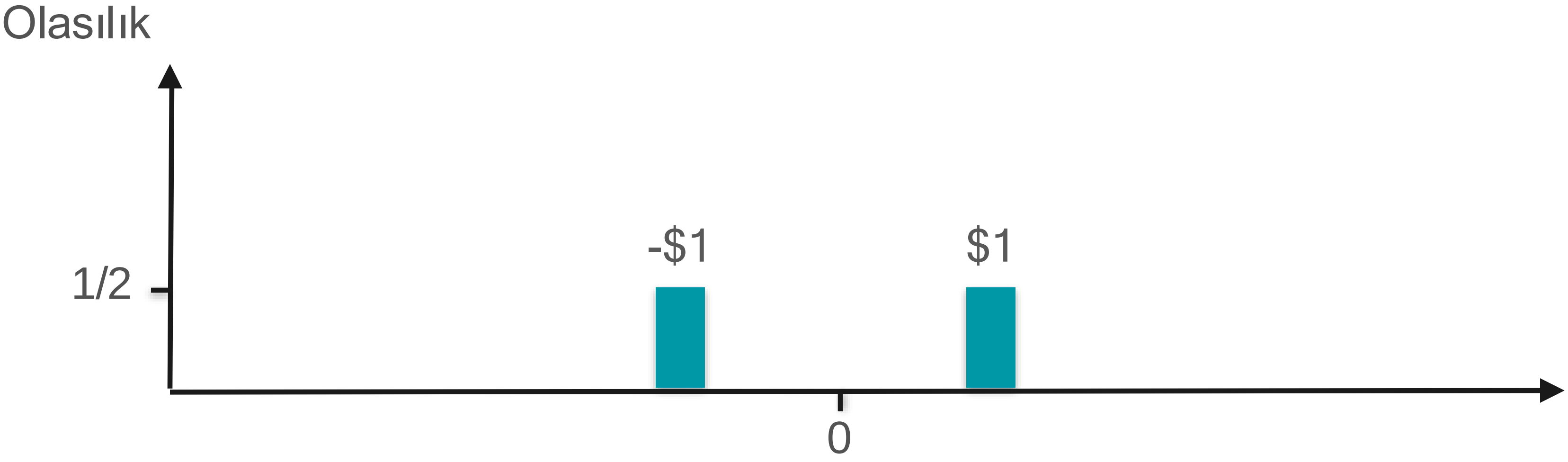
Aynı beklenen değere sahip olsalarda aralarında çok büyük farklılık vardır.

Bu oyunu oynamak için ödenmesi gereken mantıklı para miktarı nedir?

Sonuçlardaki yayılımın farkını ölçmenin bir yolunu arıyorsanız bu beklenen değer değildir. Varyanstır.

Beklenen değer burda farkı gösteremez. Her ikisinde de 0 dolar çünkü.

Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi



Her iki oyunuda çizelim.

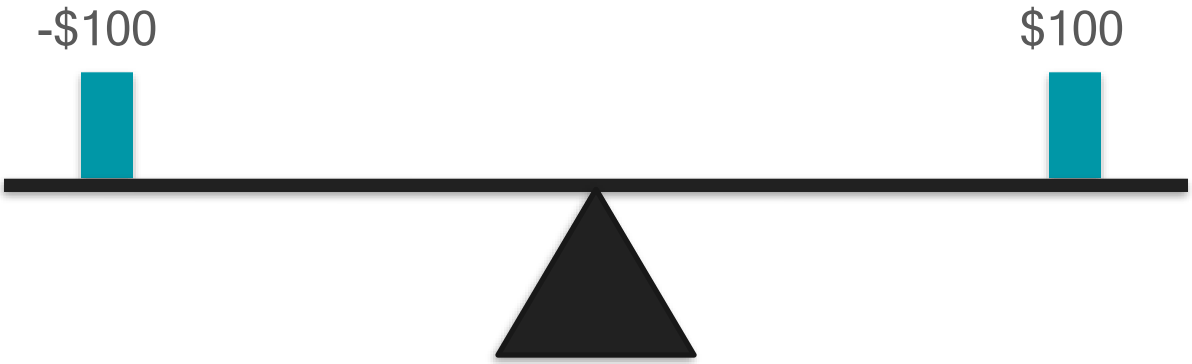
Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi

X_1 = 1. oyunda kazanılan para miktarı

$$\mathbb{E}[X_1] = 0$$

Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi

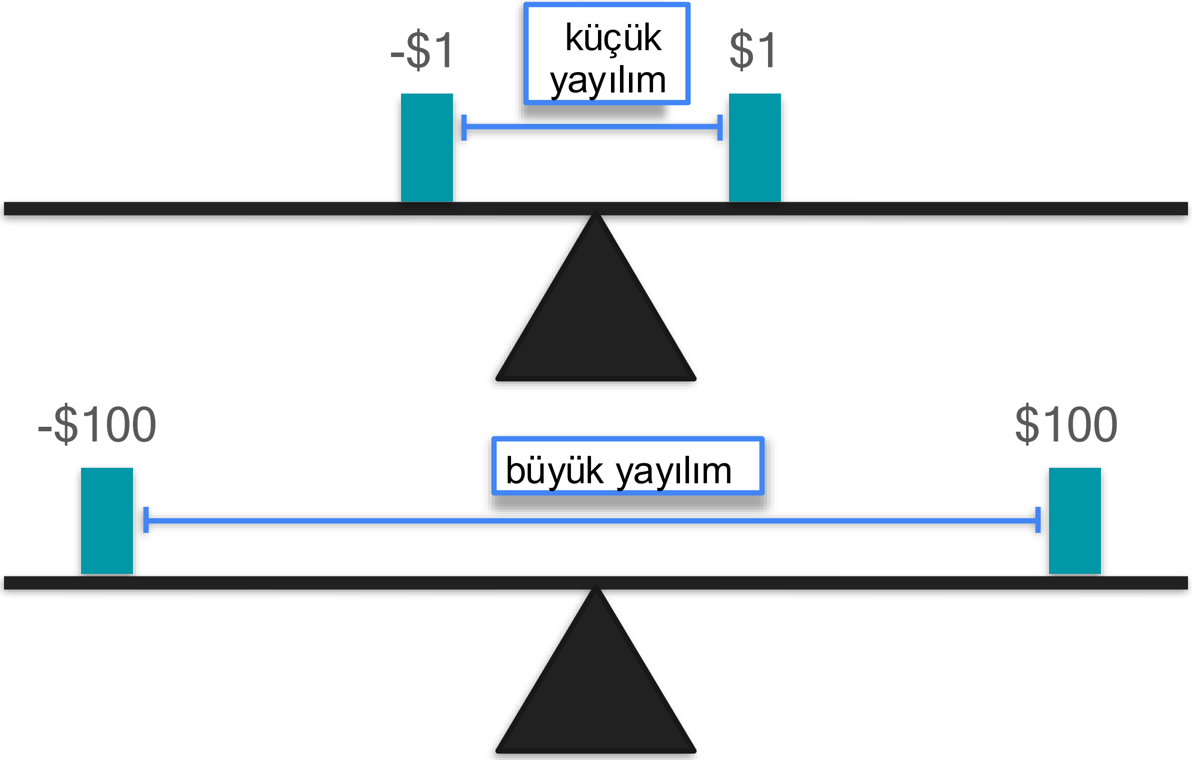
X_2 = 2. oyunda kazanılan para miktarı



$$\mathbb{E}[X_2] = 0$$

Dağılımdaki bu farkı ölçmenin yolu varyans hesaplamaktır.

Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi



$\mathbb{E}[X_1] = 0$

$\mathbb{E}[X_2] = 0$

Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi

Deviation

$x - \mathbb{E}[X]$

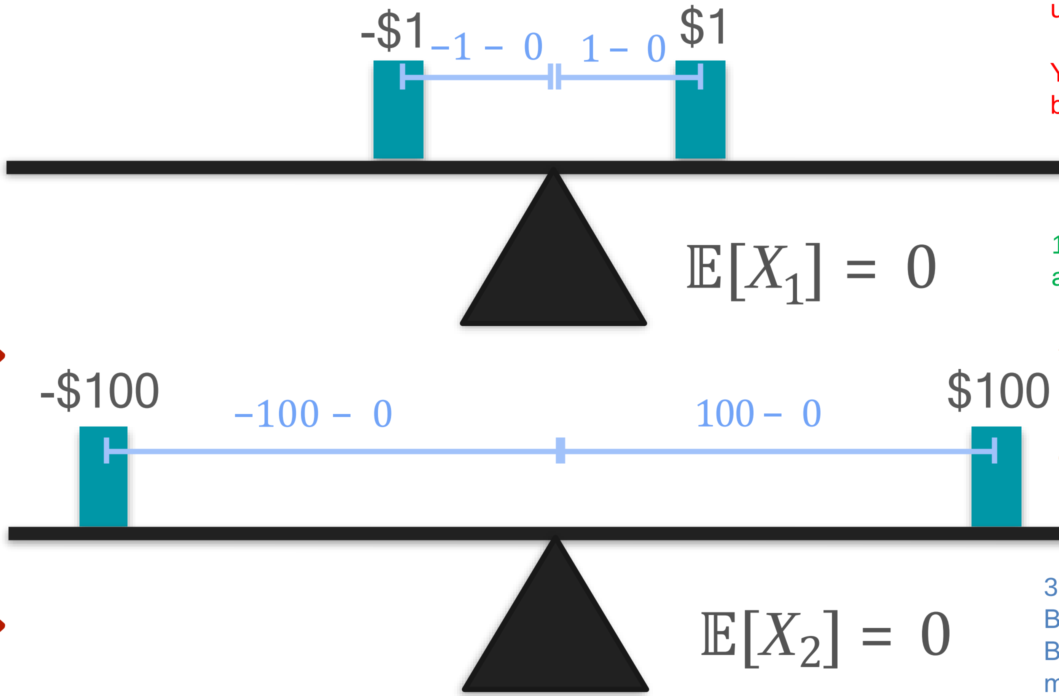
~~Expected Deviation~~

$\cancel{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]}$

$\cancel{\frac{-1+1}{2} = 0}$

~~Absolute deviation~~

$\cancel{|x - \mathbb{E}[X]|}$



Yayılım beklenen değerden ne kadar uzakta olduğuyla alakalıdır.

Yayılım küçükse noktalar (1 ve -1 dolar) beklenen değere yakındır.

1.Sapma: her nokta ile beklenen değer arasındaki farktır. x - E(X)

2. Sapmanın Ortalaması: -1+1/2 den sıfır çıktı bu örnekte. 0 çıkması garip bu verilerde hiç bir değişiklik olmadığı anlamına geliyor. Ortalama sapmanın her zaman sıfır olduğu ortaya çıktı. Bu nedenle ortalama sapma iyi bir değerlendirme değildir.

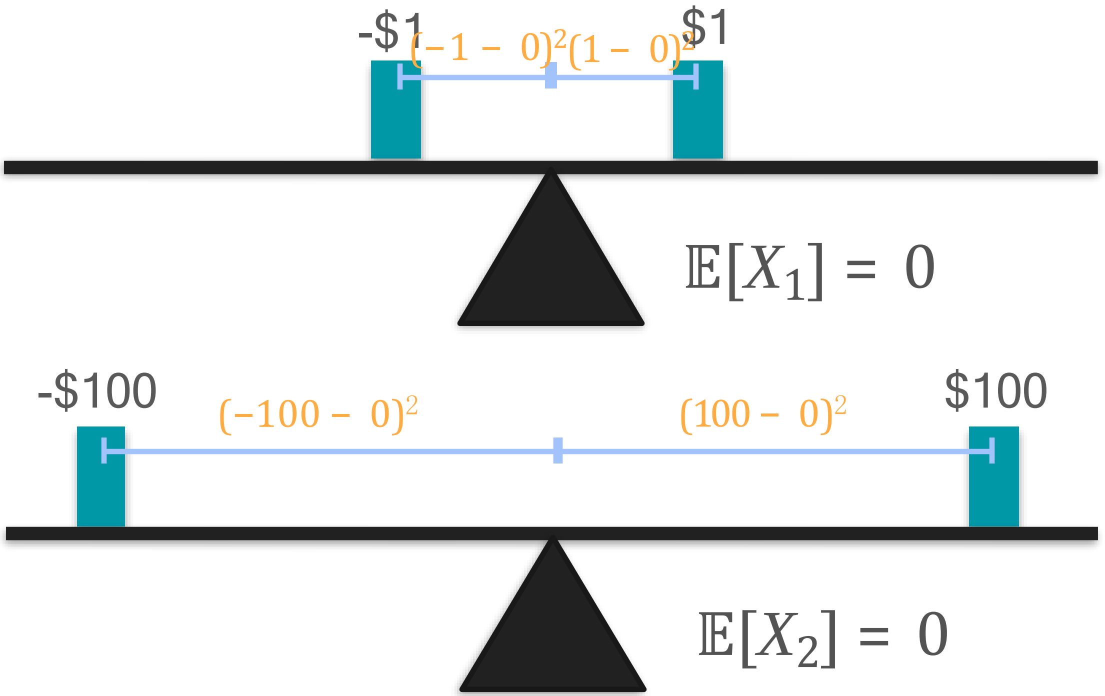
3. Absolute Sapma (mutlak sapma): Bazı negatifler ortadan kaldırılır. Buda yanlılığa sebep olduğundan mantıklı değil.

Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi

Deviation
$x - \mathbb{E}[X]$

Squared deviation
$(x - \mathbb{E}[X])^2$

Expected squared deviation
$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$



Kare sapmaların ortalaması olduğuna dikkat edin. Artık ortalama sapmayı değil, ortalama kare sapmayı ölçüyoruz.

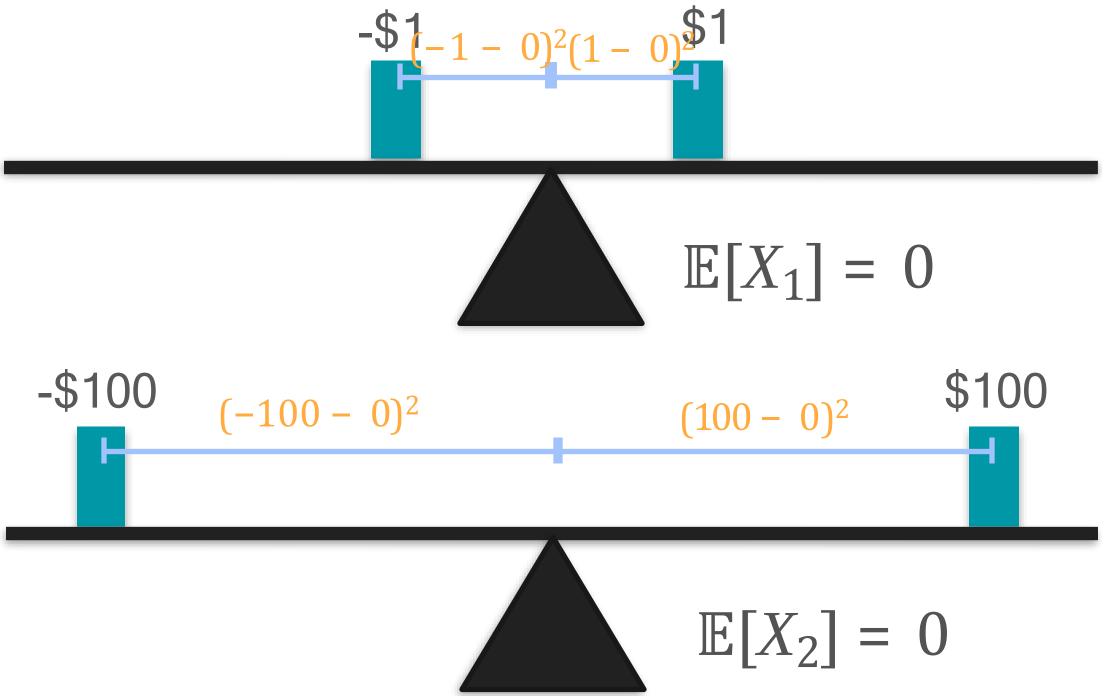
Varyans Motivasyon: Yayılımın Ölçülmesi

Varyans bir veri kümesinin yayılmasının ölçüsünü verir.

Deviation
$x - \mathbb{E}[X]$

Squared deviation
$(x - \mathbb{E}[X])^2$

Expected squared deviation
$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$



$$\frac{(-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2}{2}$$

Variance: 1

$$\frac{(-100 - 0)^2 + (100 - 0)^2}{2}$$

Variance: 10,000

Varyans Formül

$$\text{Variance} = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

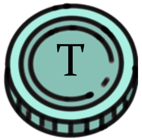
1. X’in ortalamasını bul (beklenen değer, E[X])
2. X'in her değeri için bu ortalamadan sapmayı bulun
3. Bu sapmaların karesini alın
4. Bu karesel sapmaların ortalamasını alın (beklenen değer, E[X])

“Ortalama Kare Sapma”

Varyans Motivasyon : Ortalama ile Merkezleme

Oyun 1

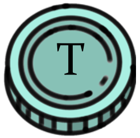
2 dolar kazanma



2 dolar kaybetme

Oyun 2

3 dolar kazanma



1 dolar kaybetme

Hangi oyun daha yüksek varyansa sahiptir?

İpucu: Yayılımı düşünün

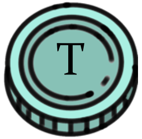
Farklı ortalamaya sahip iki oyun

Her ikiside aynı yayılıma sahip olduğundan varyanslar aynıdır

Varyans Motivasyon : Ortalama ile Merkezleme

Game 1

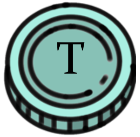
You win 2 dollars



You lose 2 dollars

Game 2

You win 3 dollars



You lose 1 dollar

İkiside aynı varyansa sahiptir

Varyans Motivasyon : Ortalama ile Merkezleme

Game 1

You win 2 dollars

You lose 2 dollars

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

Game 2

You win 3 dollars

You lose 1 dollar

$$\mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 3 = 1$$

Beklenen değerleri farklı

Varyans Motivasyon : Ortalama ile Merkezleme

Game 1

You win 2 dollars

You lose 2 dollars

$$\mathbb{E}[X_1] = 0 \qquad \frac{1}{2}(-2-0)^2 + \frac{1}{2}(2-0)^2 = 4$$

Farklı kazanç ama aynı yayılım

Game 2

You win 3 dollars

You lose 1 dollar

$$\mathbb{E}[X_2] = 1 \qquad \frac{1}{2}(-1-1)^2 + \frac{1}{2}(3-1)^2 = 4$$

Beklenen değerler farklı ancak varyanslar aynı

Varyans Formül

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}
$$

Varyans Formül

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + \mathbb{E}[X]^2]$$

$\mathbb{E}[\text{constant} \cdot X] = \text{constant} \cdot \mathbb{E}[X]$

$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mathbb{E}[X]X] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]^2]$$

$\mathbb{E}[X]$ is a constant

$\mathbb{E}[\text{constant}] = \text{constant}$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$$

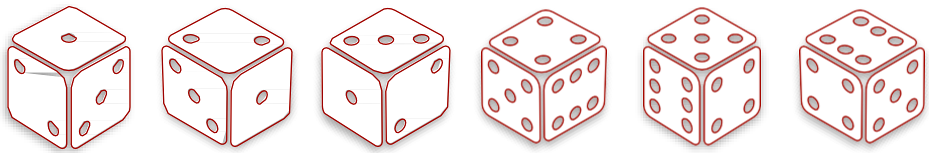
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Varyansın Özellikleri

Oyunu oynamak 5 dolar

Olasılık:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Zar:	1	2	3	4	5	6

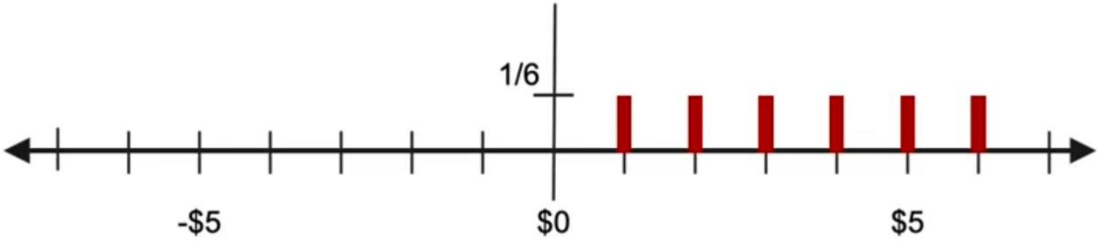


2 katı kazanma:	\$2	\$4	\$6	\$8	\$10	\$12
Net Kar:	-\$3	-\$1	\$1	\$3	\$5	\$7

Varyansın Özellikleri

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

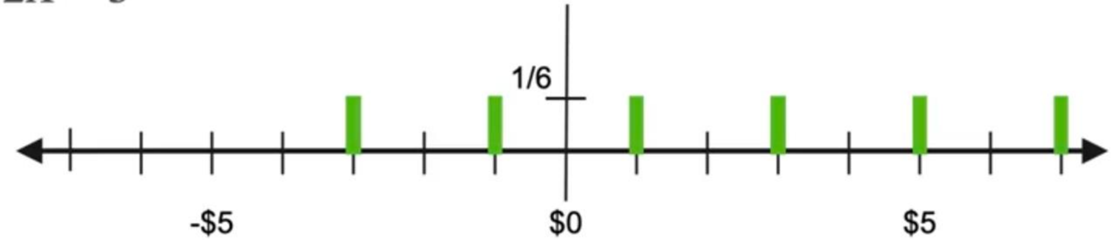
Zar atma rastgele değişkendir: X



Net kar rastgele değişkendir: Y

$Y = 2X - 5$

$Var(Y) = Var(2X - 5) = 4Var(X)$



DeepLearning.AI

Varyansın Özellikleri

yayılımı değiştirir

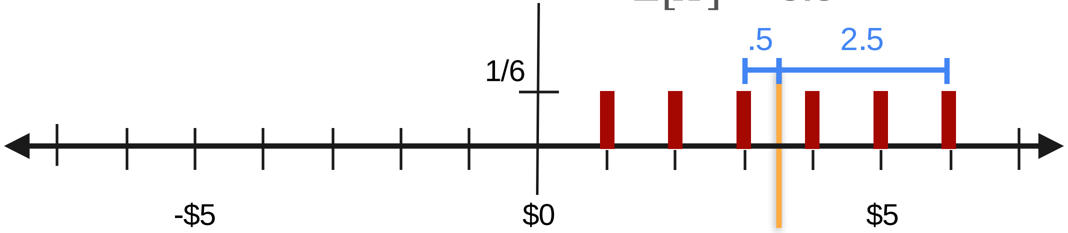
$$Var(\boxed{aX} + \boxed{b}) = a^2 Var(X)$$

yayılımı değiştirmez

Varyans: “Ortalama Kare Sapma”

Zar atma rastgele değişkendir: X

$\mathbb{E}[X] = 3.5$

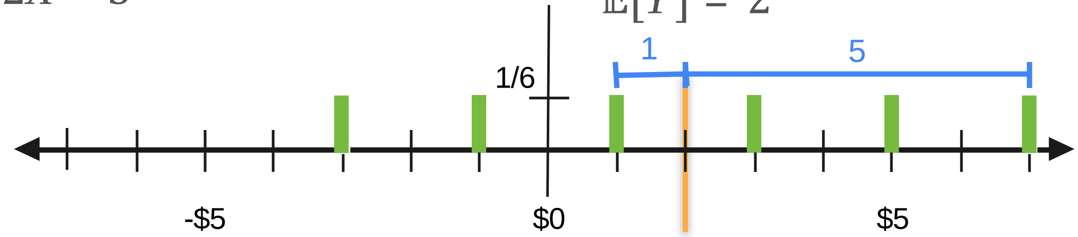


X de en büyük sapma 2.5 iken Y de en büyük sapma 5 tir. Tüm sapmalar 2 katına çıktı. 0.5 -> 1 ve 2.5->5

Net kar rastgele değişkendir: $Y = 2X - 5$

$Var(Y) = Var(2X - 5) = 4Var(X)$

$\mathbb{E}[Y] = 2$



Varyans ortalama kare sapma olduğundan ortalama 2 kat büyükse, varyansın 4 kat büyük olması mantıklıdır.

DeepLearning.AI

Dağılımın Tanımları

Standart Sapma

Varyans rastlantı değişkeninin karesini alıyor yani ayak ölçününüzün metre cinsinden karesi mesela. Bu pek uygun değil. Varyansın birimlerle alakalı sıkıntısı var.

Varyans metre kare veya ayak kare cinsinden ölçülür. Bu pek yararlı değil. Ne yapacağız. Karekökünü alacağız. Buna standart sapma diyoruz.

Dolayısıyla standart sapma dağılımı aynı birimlerini kullanarak dağılımın yayılımını ölçmenin kullanışlı bir yoludur.

Standart Sapma

$$\overset{m^2}{\boxed{Var(X)}} = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \overset{m^2}{\boxed{\mathbb{E}[X^2]}} - \overset{m^2}{\boxed{\mathbb{E}[X]^2}}$$

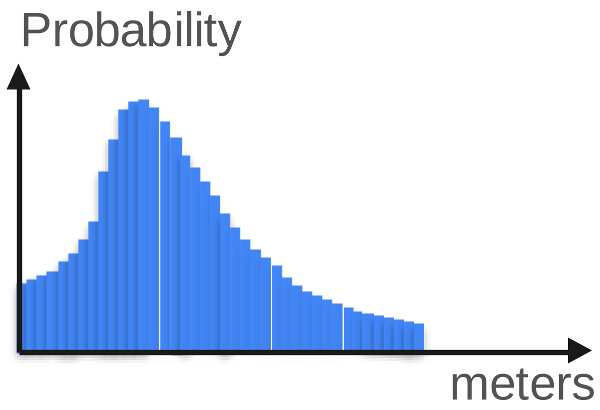
X metre cinsinden ölçülür.

Sonra $\mathbb{E}[X]$ metre cinsinden hesaplanır

Sonra $Var(X)$ metere^2 cinsinden hesaplanır

Sonra $\sqrt{Var(X)}$ metre cinsinden hesaplanır

$std(X) = \sqrt{Var(X)}$, standart sapma



E(X) örneğin bize ölçtüğümüz insanların boylarının ortalamasını söyler. Yani ölçtüğümüz değişkenle aynı birimde.

Ancak varyans m2 cinsindendir. Yani X in varyansı metre kare cinsinden ölçülür.

Standart sapma X in varyansının kareköküdür.

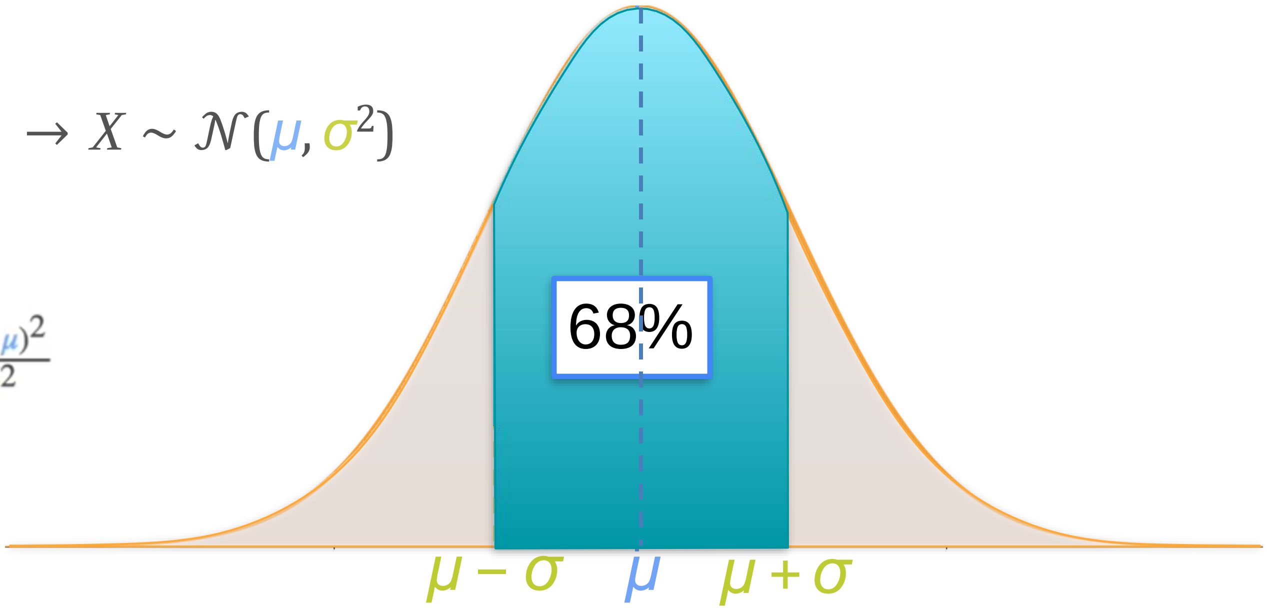
Normal Dağılım: 68 - 95 - 99.7 Kuralı

Parametreler:

- μ : dağılım merkezi
- σ : dağılımın yayılımı

$\rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

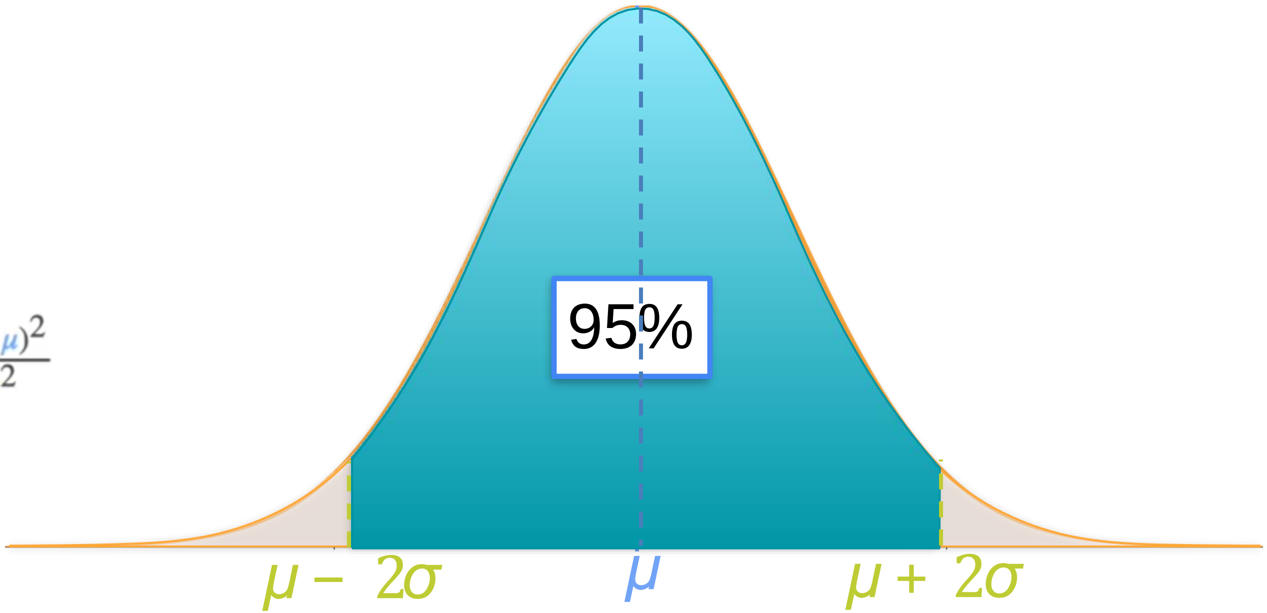


Normal Dağılım: 68 - 95 - 99.7 Kuralı

Parametreler:

- μ : dağılım merkezi
- σ : dağılımın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

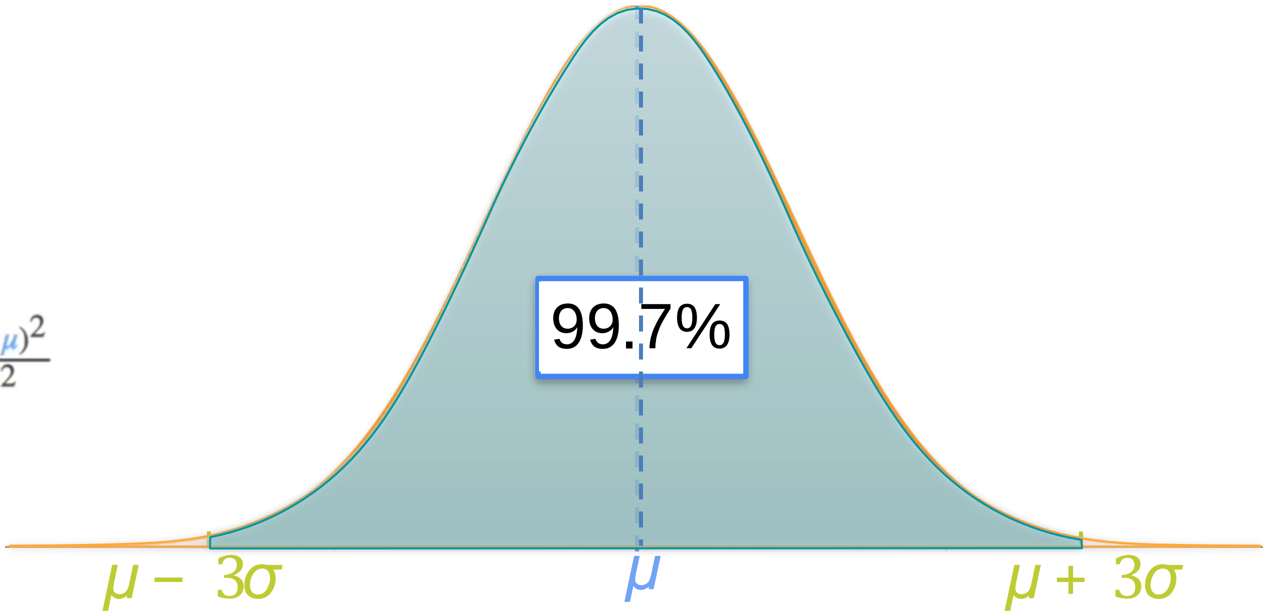


Normal Dağılım: 68 - 95 - 99.7 Kuralı

Parametreler:

- μ : dağılım merkezi
- σ : dağılımın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

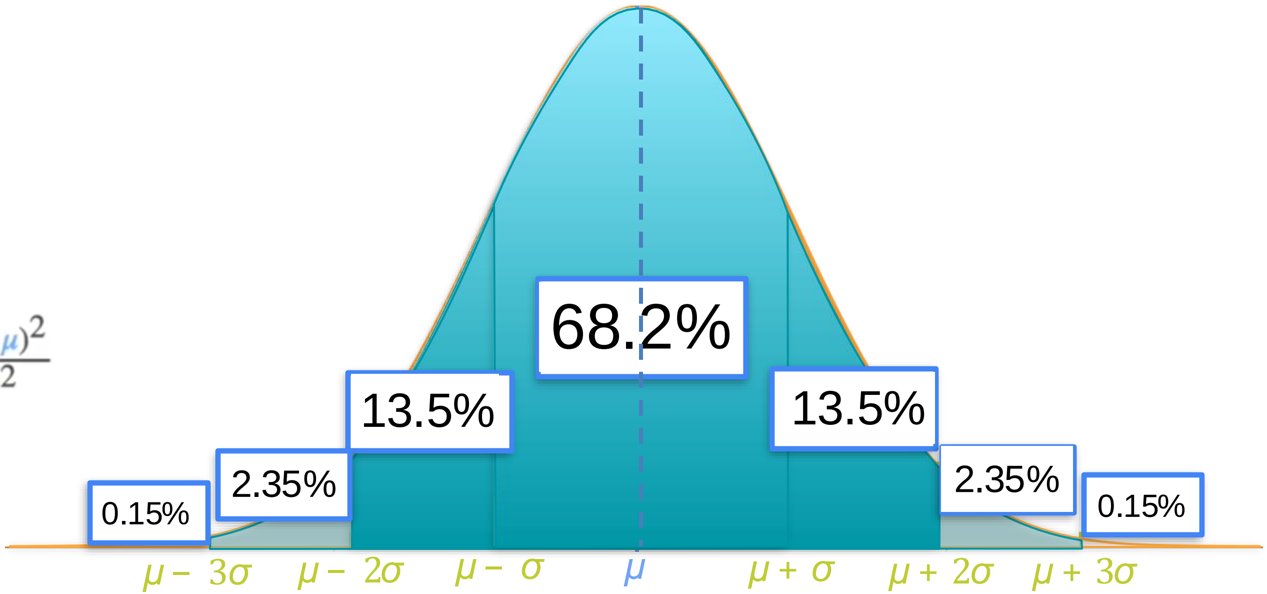


Normal Dağılım: 68 - 95 - 99.7 Kuralı

Parametreler:

- μ : dağılım merkezi
- σ : dağılımın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



Özet

5.1. Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

Değişkenin ortalaması beklenen değer olarak da ifade edilir ve anakütlenin istatistiksel ölçüsüdür. Rastgele bir değişkenin ortalaması μ ya da $E(x)$ ile gösterilir ve bu değişkenlerin gösterdikleri dağılımlar olasılık fonksiyonu ile temsil edildiğinden bu fonksiyonun beklenen değeri bu dağılımın da ortalamasıdır. Bir rastgele değişkenin beklenen değeri, kesikli değişken ise toplam, sürekli değişken ise integral alınarak bulunur. Bu başlık altında bir rastgele değişkenin kesikli olasılık fonksiyonu ve sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonu için beklenen değerlerinin bulunuşu gösterilecektir.

5.1.1. Kesikli Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

Kesikli rastgele değişkeninin ortalaması, üzerinde durulan bir olayın (deneyin) birden fazla kez tekrarlanması durumunda ortaya çıkacak sonuçların ortalama değeridir. X kesikli rastgele değişkeni S örnek uzayında tanımlı olmak üzere, x değişken değerlerinin kendilerine karşılık gelen olasılıklarla çarpılıp toplanmasına *kesikli rastgele değişkenin beklenen değeri* denir ve aşağıda verildiği biçimde bulunur.

X=x	x_1	x_2 ...	x_N
P(X=x)	$P(x_1)$	$P(x_2)$ ...	$P(x_N)$

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \cdots + x_N P(x_N)$$

Örnek 5.1. Son bir ayda bir fabrikada üretim esnasında rastgele seçilen ürünler arasından ürünün kusurlu gelme sayısı X kesikli rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

X=x	1	2	3	4
P(X=x)	0.35	0.30	0.20	0.15

a. $P(X<4)$ olasılığını bulunuz?

b. Kusurlu sayısı olan X'in beklenen değerini bulunuz?

Çözüm:

a. $P(X<4) = 0.35+0.30+0.20 = 0.85$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n=4} 1(0.35) + 2(0.30) + 3(0.20) + 4(0.15) = 2.15$$

Örnek 5.2. Bir madeni paranın üç kez atılması deneyinde, X paranın yazı gelmesini göstermek üzere,

a. Olasılık fonksiyonunu bulunuz?

b. X rastgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz?

Çözüm:

a. Örnek uzayı k = 2 ve n = 3 ise $k^n = 2^3 = 8$ bulunur ve S = {YYY, YYT, YTY, YTT, TTY, TYT, TYY, TTT} olur.

Bu deney için örnek uzayı ve karşılık gelen olasılıklar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Örnekler	Yazıların sayısı	Olasılık
YYY	3	1/8
YYT	2	1/8
YTY	2	1/8
TYY	2	1/8
YTT	1	1/8
TTY	1	1/8
TYT	1	1/8
TTT	0	1/8

Buna göre olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

X=x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

b. $E(X) = \sum_{i=0}^{n=3} 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{12}{8} = 1.50$

Örnek 5.3. Yeni bir hastalığa karşı ilaç üreten bir firma; bu ilaca yüksek talep olursa 0.30 olasılıkla yılda 3.8 milyon $ kâr, normal talep olursa 0.55 olasılıkla 1.5 milyon $ kâr ve çok düşük talep olursa 0.15 olasılıkla yılda 2.6 milyon $ zarar edeceklerini hesaplamıştır. Buna göre,

a. x yıllık kârı göstermek üzere, x'in olasılık fonksiyonunu bulunuz?

X r.d'i kârı göstersin

b. x'in beklenen değerini bulunuz?

Çözüm:

a.

X=x	3.8	1.5	−2.6
P(X=x)	0.30	0.55	0.15

b. $E(X) = 3.8(0.30) + 1.5(0.55) - 2.6(0.15) = 1.575$

5.1.3. Beklenen Değerin Özellikleri

Verilen özellikler X ve Y iki rastgele değişken olmak üzere bu değişkenlerin $X+Y$, $X.Y$ ya da X/Y gibi fonksiyonlarının beklenen değerlerinin hesaplanmasını sadeleştirecektir. Sonuçlar kesikli ya da sürekli rastgele değişkenlerin her ikisi içinde geçerlidir. Burada ispatlar verilmeden, özellikler sadece kesikli rastgele değişken için verilecektir.

a ve b sabit bir sayı olmak üzere;

1. Sabit sayıların beklenen değeri kendisine eşittir. $E(\mathrm{a})=\mathrm{a}$
2. $E(\mathrm{a}X + \mathrm{b}) = \mathrm{a}E(X) + \mathrm{b}$
3. $E(\mathrm{a}X) = \mathrm{a}E(X)$

5.1.4. Y = U(X) Biçiminde Verilen Fonksiyonun Beklenen Değeri

$Y = U(X)$ biçiminde verilen bir fonksiyon X değişkeninin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu X değişkeni Y'de tanımlı olup buradan Y için beklenen değer hesaplanır. Bu beklenen değerin hesaplanabilmesi X değişkeninin kesikli ve sürekli değişken olmasına göre aşağıda verildiği biçimde bulunur.

X kesikli rastgele değişkeni;

$$E(Y) = E[U(X)] = \sum_{x}^{n} u(x)P(x)$$

X sürekli rastgele değişkeni;

$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx$ bulunur.

Örnek 5.4. İki zar atıldığında üste gelen noktaların toplamının asal sayı olduğunu gösteren X rastgele değişkeninin,

a. Olasılık ve dağılım fonksiyonunu bulunuz?

b. $P(X \leq 4)$ ve $P(4 < X \leq 8)$ olasılıklarını bulunuz?

c. $E(3X-4)$ beklenen değerini bulunuz?

Çözüm:

a.

Örnek uzayı, S = {(1,1)(1,2)(1,4)(1,6)(2,1)(2,3)(2,5)(3,2)(3,4)(4,1)(4,3)(5,2)(5,6)(6,1)(6,5)}

Olasılık fonksiyonu aşağıdaki biçimde oluşturulur:

X=x	2	3	5	7	11
P(X = x)	1/15	2/15	4/15	6/15	2/15

Olasılık dağılımı fonksiyonu aşağıda verilen iki farklı biçimde oluşturulabilir:

X=x	x < 2	2 ⩽ x< 3	3 ⩽ x < 5	5 ⩽ x < 7	7 ⩽ x < 11	11 ⩽ x
F(x)	0	1/15	3/15	7/15	13/15	1

b. Olasılık fonksiyonu kullanılarak olasılıklar bulunabilir.

$P(X \leq 4) = 3/15$ ya da $F(4) = 3/15$

$P(4 < X \leq 8) = P(X{=}5) + P(X{=}7) = (4/15) + (6/15) = 10/15$

c. $E(X) = \sum_{i=2}^{n=11} x_i P(x_i)$

$$= 2\left(\frac{1}{15}\right) + 3\left(\frac{2}{15}\right) + 5\left(\frac{4}{15}\right) + 7\left(\frac{6}{15}\right) + 11\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{92}{15}$$

$$E(3X - 4) = 3E(X) - 4 = 3\left(\frac{92}{15}\right) - 4 = \frac{72}{5}$$

Örnek 5.7. İnternet üzerinden satış yapan bir firma, 4/5 olasılıkla ürünler zamanında ve 1/5 olasılıkla ürünler alıcıya zamanında ulaşmadığını belirlemiştir. Üründen elde edilen kârı gösteren X rastgele değişkeni için ürün alıcıya zamanında ulaşırsa 2₺ kazanıyor, zamanında ulaşmazsa 3₺ kaybediyor.

a. X'in olasılık fonksiyonunu ve beklenen değeri $E(X)$'i bulunuz?

b. $Y = X^2+2$ olarak tanımlanmış ise $E(X)$'i bulunuz?

Çözüm:

a. X'in olasılık fonksiyonu aşağıda verilen iki farklı şekilde oluşturulabilir.

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, x = -3 \\ \frac{4}{5}, x = 2 \\ 0, d.d \end{cases} \quad \text{ya da}$$

X=x	-3	2
P(X=x)	1/5	4/5

$$E(X) = -3\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = 1$$

b. $Y = U(X) = X^2+2$ olarak tanımlandığına göre,

$$E(Y) = E(X^2 + 2) = \sum (x^2 + 2)p(x)$$

$$= [(-3)^2 + 2]\frac{1}{5} + [(2)^2 + 2]\frac{4}{5} = 7$$

5.3.1. Kesikli Bir Rastgele Değişkenin Varyansı

X kesikli rastgele değişkenin olasılık fonksiyonun yayılmasına *kesikli rastgele değişkenin varyansı* denir ve $P(X)$ olasılık fonksiyonu olmak üzere aşağıda verildiği biçimde bulunur.

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 P(x) = \sum_x x^2 P(x) - \mu^2 = \sum_x x^2 p(x) - \left[\sum_x xP(x)\right]^2$$

Örnek 5.17. Bir firma 100 ürünlük sevkiyatta kusurlu sayısını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

Kusurlu sayısı (X_i)	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

X'in varyansı $Var(X)$'i bulunuz?

Çözüm:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{4} x_i P(x_i)$$

$$= 0(0.1) + 1(0.2) + 2(0.4) + 3(0.2) + 4(0.1) = 2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{4} x_i^2 P(x_i)$$

$$= 0^2(0.1) + 1^2(0.2) + 2^2(0.4) + 3^2(0.2) + 4^2(0.1) = 5.2$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5.2 - (2)^2 = 1.2$$

Örnek 5.18. Bir çağrı merkezine bir saatte gelen telefonların sayısını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{130}x \,, x = 1,2,3 \dots ,12 \\ 0 \qquad , d.d \end{cases}$$

X'in varyansı $Var(X)$'i bulunuz?

Çözüm: $\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{12} xP(x) = \sum_{x=1}^{12} x\frac{1}{130}x = \sum_{x=1}^{12} \frac{1}{130}x^2 = \frac{650}{130} = 5$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{12} x^2P(x) = \sum_{x=1}^{12} x^2\frac{1}{130}x = \sum_{x=1}^{12} \frac{1}{130}x^3 = \frac{6084}{130} = 46.8$$

$$\sigma^2 = Var(X) = 46.8 - (5)^2 = 21.8$$

1. Bir fabrikada üretilen ampullerin %5' kusurlu ve %95'i kusursuz olduğu bilinmektedir. Fabrika sahibi kusurlu bir maldan 5 TL kaybeder, kusursuz bir maldan 10 TL kazanmaktadır. X rastgele değişkeni malın net karını (%) göstermek üzere fabrika sahibinin beklenen kazancı nedir?

Çözüm: $E(X) = -5(0.05) + 10(0.95) = 9.25$

2. Bir üretimde kusurlu sayılarını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(7-x), & x = 3,4,5,6 \\ 0 & , d.d \end{cases}$$

X'in beklenen değerini bulunuz?

Çözüm: X'in olasılık fonksiyonu,

X=x	3	4	5	6
P(X = x)	4/10	3/10	2/10	1/10

$$E(X) = \sum_{x=3}^{6} x.P(x) = 3.\frac{4}{10} + 4.\frac{3}{10} + 5.\frac{2}{10} + 6.\frac{1}{10} = 4$$

4. Bir galeri bir haftada satacağı araba sayısını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık dağılımı aşağıda verilmiştir.

X=x	1	2	3
P(X=x)	1/4	1/2	1/4

a. $E(X^2)$ değerini,

b. $E(X^2 + X)$ değerinin bulunuz?

Çözüm:

a. $E(X) = \sum_{x=1}^{3} x^2 P(X) = 1.\frac{1}{4} + 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{4} = 2$

b. $E(X^2 + X) = \sum_{x=1}^{3}(x^2 + x).P(X) = 0.\frac{1}{4} + 6.\frac{1}{2} + 12.\frac{1}{4} = 6$

5. Bir inşaat firması aldığı ürünlerin fiyatını gösteren X rastgele değişkeni için sırasıyla -2$ zarar, 4$ kâr, 8$ kâr etmiştir. Firmanın bu ürünlerden kazanç olasılıkları sırasıyla 1/6, 1/2 ve 1/3 olduğuna göre beklenen kazancı ve varyansı bulunuz?

Çözüm:

$$E(X) = -2\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 8\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{26}{6}$$

$$E(X^2) = (-2)^2\frac{1}{6} + (4)^2\frac{1}{2} + (8)^2\frac{1}{3} = 30$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 30 - \left(\frac{26}{6}\right)^2 = 30 - 18.78 = 11.22$$

5.1.2. Sürekli Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

X sürekli rastgele değişkeni S örnek uzayında tanımlı olmak üzere, x değişken değerlerinin kendilerine karşılık gelen $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuyla çarpımının integrali *sürekli rastgele değişkenin beklenen değeri* denir ve aşağıda verildiği biçimde bulunur.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Örnek 5.5. Bir uçağın yakıt miktarını (yüzde) gösteren X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

a. Yakıt miktarını gösteren X'in beklenen değeri $E(X)$'i bulunuz?

b. $E(2X/3)$ beklenen değerini bulunuz?

Çözüm:

a. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} x.(2x)dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

b. $E\left(\frac{2X}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{2x}{3}(2x)dx = \frac{4}{9}$

Örnek 5.6. Bir ülkede yıllık ölümlü trafik kaza oranını gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x\,, 0 \leq x \leq 1 \\ -(1-x)\,, 1 < x \leq 2 \\ 0\,, \quad d.d \end{cases}$$

Trafik kaza oranı olan X'in beklenen değeri $E(X)$'i bulunuz?

Çözüm: $E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^1 x\,(x)dx - \int_1^2 x(1-x)\,dx$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{6}$$

Örnek 5.8. Bir işletmenin yıllık kârı X, olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4-x), & 0 \le x \le 4 \\ 0 & , d.d \end{cases}$$

a. Bu işletmenin ortalama kârı $E(X)$'i bulunuz?

b. Y = X+1 olarak tanımlanmış ise $E(X)$'i bulunuz?

Çözüm:

a. $E(X) = \int_0^4 x\left[\frac{1}{8}(4-x)\right]dx = \frac{1}{8}\int_0^4 (4x - x^2) = \frac{1}{8}(10.67) = 1.333$

b. Y = U(X) = X–1 olarak tanımlandığına göre,

$$E(Y) = E(X-1) = \int_0^4 (x-1)\left[\frac{1}{8}(4-x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 (x-1)(4-x)dx = 0.334$$

5.3.2. Sürekli Bir Rastgele Değişkenin Varyansı

X sürekli rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonun yayılmasına *sürekli rastgele değişkenin varyansı* denir ve $f(X)$ olasılık fonksiyonu olmak üzere aşağıda verildiği biçimde bulunur.

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx\right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Örnek 5.19. Bir füzenin menzilini gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & 1 < x < 3 \\ 0 & , d.d \end{cases}$$

X'in varyansı $Var(X)$'i bulunuz?

Çözüm: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X) = \int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 x\frac{1}{2}(x-1)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}(x^2 - x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 = \frac{14}{6}$$

$$E(X^2) = \int_1^3 x^2 f(x)dx = \int_1^3 x^2\frac{1}{2}(x-1)dx = \int_1^3 \frac{1}{2}(x^3 - x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{136}{24} = \frac{17}{3}$$

$$Var(X) = \frac{17}{3} - \left(\frac{14}{6}\right)^2 = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Örnek 5.20. Bir fabrikada elektrik arızasının tespit etme süresini gösteren X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ,0 < x < 1 \\ \frac{2}{3} & ,1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ,d.d \end{cases}$$

X'in varyansı $Var(X)$'i bulunuz?

Çözüm: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^1 x(x^2)dx + \int_1^2 x(\tfrac{2}{3})dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{2}{3} x\, dx = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2(x^2)dx + \int_1^2 x^2(\tfrac{2}{3})dx$$

$$= \int_0^1 x^4 dx + \int_1^2 \frac{2}{3} x^2\, dx = \frac{79}{45} = 1.756$$

$$Var(X) = 1.756 - (1.25)^2 = 0.194$$