Hafta 9

DeepLearning.AI

İki Değişkenli Olasılık Dağılımları

6.1 GİRİŞ

Bu bölüme kadar tek değişkenli olasılık dağılımları incelendi. Oysa pratikte birçok problemde değişken sayısı birden fazla olabilir. Bu durumda kullanılan olasılık dağılımları farklılık gösterecektir. Değişkenlerin kesikli veya sürekli olması da bu farklılığı oluşturmada önemlidir.

Bu bölümde iki rastgele değişken ele alınacak ve bu değişkenlerin her ikisinin de kesikli veya her ikisinin de sürekli olması durumu incelenecektir.

6.2 KESİKLİ RASTGELE DEĞİŞKENLER

6.2.1 Ortak Olasılık Fonksiyonu

Tanım: X ve Y aynı örnek uzayda tanımlanmış kesikli rastgele değişkenler olsun. X ve Y'nin her gerçel değeri için P(x, y) ile tanımlanan

$$P(X = x, Y = y) = P(x, y)$$

fonksiyonuna X ve Y rastgele değişkenlerinin **ortak olasılık fonksiyonu** denir. Bu fonksiyonun ortak olasılık fonksiyonu olabilmesi için;

1) $P(x_i, y_i) \geq 0$; her gerçel x_i ve y_j için

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P(x_i, y_j) = 1$

olmalıdır.

ÖRNEK 6.1:

Bir karayolunda meydana gelen trafik kazaları ile ilgili çalışmada X rastgele değişkeni, kaza sonucu kişinin sağlık durumunu; Y rastgele değişkeni ise kişinin emniyet kemeri takıp takmadığını göstersin.

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ölü} \\ 1 & \text{yaralı} \\ 2 & \text{sağlam} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & \text{emniyet kemerini takmamış} \\ 1 & \text{emniyet kemerini takmış} \end{cases}$$

Tablo 6.1: Veri Tablosu

Sağlık durumu		Emniyet kemeri		
		Takmamış	Takmış	Toplam
	Ölü	230	45	275
	Yaralı	340	120	460
	Sağlam	1015	850	1865
	Toplam	1585	1015	2600

Verilen bu tabloya göre X ve Y rastgele değişkenleri için ortak olasılık fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM 6.1:

$$P(X=0,\ \ Y=0)=\frac{230}{2600}=0,088$$

$$P(X=0,\ \ Y=1)=\frac{45}{2600}=0,0173$$

$$P(X=1,\ \ Y=0)=\frac{340}{2600}=0,1308$$

$$P(X=1,\ \ Y=1)=\frac{120}{2600}=0,0462$$

$$P(X=2,\ \ Y=0)=\frac{1015}{2600}=0,3904$$

$$P(X=2,\ \ Y=1)=\frac{850}{2600}=0,3269$$

Y \ X	0	1	2
0	0,0880	0,1308	0,3904
1	0,0173	0,0462	0,3269

olduğundan bu fonksiyonun bir ortak olasılık fonksiyonu olduğu söylenebilir.

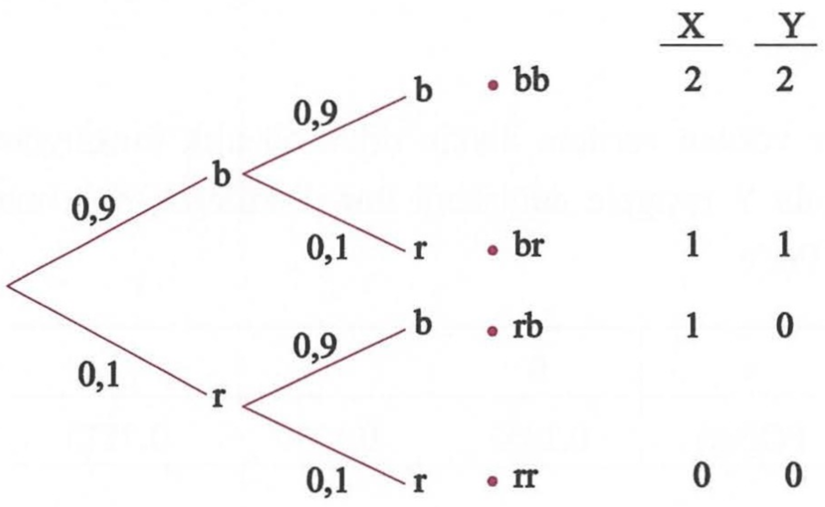
Çünkü

$$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{1}P(x_i,y_j)=\left[0,088+0,0173+.....+0,3269\right]=1'\text{dir.}$$

ÖRNEK 6.2:

Birbirinden bağımsız iki test arka arkaya yapılıyor. Testlerin herbirinin iki mümkün sonucu var: b (başarılı) ve r (başarısız). Testin başarılı olma olasılığı 0,9 olup X başarılı testlerin sayısını, Y ise ilk başarısızlıktan önceki başarılı testlerin sayısını göstermektedir. Bir ağaç diyagramı çizerek X ve Y nin ortak olasılık fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM 6.2:



Örnek uzay S={bb, br, rb, rr} dir. Ağaç diyagramından P(bb)=0,81, P(br) = 0,09 , P (rb) = 0,09 ve P(rr) = 0,01 olduğu açıktır.

$$P(x,y)=\begin{cases} 0,81 & x=2, y=2 \\ 0,09 & x=1,\ y=1 \\ 0,09 & x=1,\ y=0 \\ 0,01 & x=0, y=0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Olasılıklar toplamının 1 olduğu görülmektedir.

6.2.2 Marjinal Olasılık Fonksiyonları

Tanım: X ve Y aynı örnek uzayda tanımlı kesikli rastgele değişkenler olsun. Ortak olasılık fonksiyonu x ve y nin tüm gerçel değerleri için,

$$P(X = x, Y = y) = P(x, y)$$

olduğuna göre

$$P(x) = \sum_{y} P(x, y)$$

$$P(y) = \sum_{x} P(x, y)$$

olasılıklarına sırası ile X ve Y nin **marjinal olasılık fonksiyonları** adı verilir.

ÖRNEK 6.3:

Tablo 6.1'de verilen verilere ilişkin ortak olasılık fonksiyonu yeniden ele alınsın. Bu tabloda Y rastgele değişkeni ihmal edilerek X'in marjinal olasılık fonksiyonu olan P(x):

x	0	1	2
P(X=x)	0,1053	0,1770	0,7173

şeklinde bulunur. Çünkü;

$$P(X=0)=\sum_{y} P(x,y)=0,0880+0,0173=0,1053$$

$$P(X=1)=\sum_{y} P(x,y)=0,1308+0,0462=0,1770$$

$$P(X=2)=\sum_{y} P(x,y)=0,3904+0,3269=0,7173$$

ve

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

olduğu görülmektedir.

X rastgele değişkeni ihmal edilerek Y'nin marjinal olasılık fonksiyonu;

Y	0	1
P(Y=y)	0,6092	0,3904

olup

$$P(Y=0)=\sum_{x} P(x,y)=0,0880+0,1308+0,3904=0,6092$$

$$P(Y=1)=\sum_{x} P(x,y)=0,0173+0,0462+0,3269=0,3904$$

ve

$$P(Y=0)+P(Y=1)=1$$

olduğu görülür.

6.2.3 Koşullu Olasılık Fonksiyonu

Aynı örnek uzayda tanımlı X ve Y kesikli rastgele değişkenler ise $Y = y$ verilmişken X'in **koşullu olasılık fonksiyonu**

$$P(X = x \setminus Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

şeklinde verilir.

ÖRNEK 6.4:

$P(x,y)$, X ve Y'nin ortak olasılık fonksiyonu olmak üzere $P(1,1)=0,4$ $P(1,2)=0,1$ $P(2,1)=0,2$ $P(2,2)=0,3$ olduğu varsayılsın. $Y=1$ verilmişken X'in koşullu olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

ÇÖZÜM 6.4:

$$P(Y=1)=\sum_{x} P(x,1)=P(1,1)+P(2,1)=0,6$$

olduğu açıktır. Y = 1 verilmişken X'in koşullu olasılık fonksiyonu

$$P(X=1 \setminus Y=1)=\frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{P(1,1)}{P(Y=1)}=\frac{0,4}{0,6}=\frac{4}{6}$$

$$P(X=2 \setminus Y=1)=\frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{P(2,1)}{P(Y=1)}=\frac{0,2}{0,6}=\frac{2}{6}$$

dır.

ÖRNEK 6.5:

X ve Y sırası ile λ_1 ve λ_2 ortalamalarına sahip iki bağımsız Poisson rastgele değişkeni olsun. $X+Y = n$ olarak verildiğine göre $X=k$'nın koşullu olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM 6.5:

$$P(X=k \setminus X+Y=n)=\frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$

elde edilir. Son eşitlik, X ve Y'nin bağımsız değişkenler olması varsayımından yazılır. Bu arada X+Y de $\lambda_1+\lambda_2$ ortalamalı bir Poisson dağılımına sahiptir. Böylece

$$P(X=k \setminus X+Y=n)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}\cdot$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

Dikkat edilirse bu bir Binom dağılımıdır ve bu dağılımın parametreleri n ve $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$'dir.

ÖRNEK 6.6:

$$P(x,y)=\begin{cases} c\binom{2}{x}\binom{3}{3-y}, & x=0,1,2 \quad y=0,1,2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

a) Yukarıda verilen fonksiyonun bir ortak olasılık fonksiyonu olabilmesi için c ne olmalıdır?

b) P(x) ve P(y) marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

c) P(y\x) koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

d) P(x\y) koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM 6.6:

a) $P(x,y)=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} c\binom{2}{x}\binom{3}{3-y}=1$ olmalıdır.

$$P(x,y)=c\left[\binom{2}{0}\binom{3}{3-0}+\binom{2}{0}\binom{3}{3-1}+\binom{2}{0}\binom{3}{3-2}+....+\binom{2}{2}\binom{3}{3-2}\right]=1$$

Buradan

$$c=\frac{1}{28}$$

elde edilir.

b) $$P(x)=\sum_{y=0}^{2}P(x,y)=\frac{1}{28}\left[\binom{2}{x}\binom{3}{3-0}+\binom{2}{x}\binom{3}{3-1}+\binom{2}{x}\binom{3}{3-2}\right]=\frac{7}{28}\binom{2}{x}$$

$$P(y)=\sum_{x=0}^{2}P(x,y)=\frac{1}{28}\left[\binom{2}{0}\binom{3}{3-y}+\binom{2}{1}\binom{3}{3-y}+\binom{2}{2}\binom{3}{3-y}\right]=\frac{4}{28}\binom{3}{3-y}$$

c) $$P(y\setminus x)=\frac{P(x,y)=}{P(x)}=\frac{\frac{1}{28}\binom{2}{x}\binom{3}{3-y}}{\frac{7}{28}\binom{2}{x}}=\frac{1}{7}\binom{3}{3-y}$$

d) $$P(x\setminus y)=\frac{P(x,y)}{P(y)}=\frac{\frac{1}{28}\binom{2}{x}\binom{3}{3-y}}{\frac{4}{28}\binom{3}{3-y}}=\frac{1}{4}\binom{2}{x}$$

ÖRNEK 6.7:

$$P(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{21}(2x-y) & x=1,2,3\;;\quad y=0,1\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

a) P(x, y) bir ortak olasılık fonksiyonu mudur?

b) P(x) ve P(y) marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

c) $P(X \geq 2 \backslash Y = 0)$ olasılığını hesaplayınız.

d) $P(X \leq 2,\ Y = 2)$ olasılığını hesaplayınız.

e) $P(X > Y)$ olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM 6.7:

a) Bir fonksiyonun ortak olasılık fonksiyonu olabilmesi için sağlaması gereken iki koşul vardır.

1. $P(x_i, y_j) \geq 0, \quad \forall x_i, y_i$ için

2. $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i, y_j) = 1$

Problemde verilen fonksiyonun bu koşulları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

1. $P(1,0) = \frac{1}{21}(2.1-0) = \frac{2}{21} > 0$

$P(1,1) = \frac{1}{21}(2.1-1) = \frac{1}{21} > 0$

$P(2,0) = \frac{1}{21}(2.2-0) = \frac{4}{21} > 0$

$P(2,1) = \frac{1}{21}(2.2-1) = \frac{3}{21} > 0$

$P(3,0) = \frac{1}{21}(2.3-0) = \frac{6}{21} > 0$

$P(3,1) = \frac{1}{21}(2.3-1) = \frac{5}{21} > 0$

2. $$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=0}^{1} P(x,y) = P(1,0) + P(1,1) + P(2,0) + P(2,1) + P(3,0) + P(3,1)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{3}{21} + \frac{6}{21} + \frac{5}{21} = 1$$

Her iki koşul sağlandığından fonksiyon bir ortak olasılık fonksiyonudur.

b) $$P(x) = \sum_{y=0}^{1} P(x,y) = \frac{1}{21}\big[(2x-0)+(2x-1)\big] = \frac{1}{21}(4x-1)$$

$$P(y) = \sum_{x=1}^{3} P(x,y) = \frac{1}{21}[(2-y)+(4-y)+(6-y)] = \frac{1}{21}(12-3y)$$

c) $$P(X \geq 2 \setminus Y=0) = \frac{P(X=2, Y=0)+P(X=3, Y=0)}{P(Y=0)}$$

$$= \frac{10/21}{12/21} = \frac{5}{6}$$

d) $P(X \leq 2, Y=2) = 0$

e) $$P(X > Y) \;\; = P(1,0)+P(2,0)+P(2,1)+P(3,0)+P(3,1)$$

$$= \frac{1}{21}[2+4+3+6+5] = 20/21$$

ÖRNEK 6.8:

Tura gelme olasılığı 0,40 olan hileli bir para 2 kez atılıyor. H, ilk atışta gelen tura sayısını, G ise iki atışta gelen toplam tura sayısını göstersin.

a) H ve G nin ortak olasılık fonksiyonunu,

b) G nin marjinal olasılık fonksiyonunu,

c) H nin marjinal olasılık fonksiyonunu,

d) En az 1 tura gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM 6.8:

a)

H \ G	0	1	2
0	$\frac{60}{100}\cdot\frac{60}{100}$	$\frac{60}{100}\cdot\frac{40}{100}$	0
1	0	$\frac{40}{100}\cdot\frac{60}{100}$	$\frac{40}{100}\cdot\frac{40}{100}$

H \ G	0	1	2
0	0,36	0,24	0
1	0	0,24	0,16

Olasılıklar toplamının 1 olduğuna dikkat edilmelidir.

b)

g	0	1	2
P(G=g)	0,36	0,48	0,16

c)

h	0	1
P(H=h)	0,60	0,40

d) En az 1 tura olması istendiğine göre h = 0, g = 0 durumu hariç diğer tüm olasılıklar toplamı alınır.

$0,24+0,24+0,16=0,64$ veya $1-0.36=0,64$ tür.

6.2.4 Bağımsız Rastgele Değişkenler

Tanım: X ve Y aynı örnek uzayda tanımlı kesikli rastgele değişkenleri arasında, x ve y gerçel sayılar olmak üzere,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

ilişkisi varsa, bu iki rastgele değişken **bağımsızdır** denir, karşıtıda doğrudur.

ÖRNEK 6.9:

Y \ X	0	1	Toplam
0	0,27	0,10	0,37
1	0,18	0,18	0,36
2	0,20	0,07	0,27
Toplam	0,65	0,35	1

Yukarıdaki tablo X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu olduğuna göre X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜM 6.9:

$P(X=0,\ Y=0)=0,27$ iken $P(X=0)=0,65$ ve $P(Y=0)=0,37$ 'dir.

$P(X=0,\ Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$ olduğuna göre X ve Y bağımsız değildir.

Diğer satır ve sütunlar için bağımsızlık aramaya gerek yoktur.

ÖRNEK 6.10:

X ve Y iki kesikli rastgele değişken olup ortak olasılık fonksiyonu

$$P(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}(x+y) & x=0,1,2 \text{ ve } y=0,1,2,3\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde verilmiştir.

a) X ve Y rastgele değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonunu bulunuz.

b) X ve Y rastgele değişkenleri bağımsız mıdır?

ÇÖZÜM 6.10:

a) $P(x)=\sum_{y=0}^{3}\frac{1}{30}(x+y)=\frac{1}{30}[(x+0)+(x+1)+(x+2)+(x+3)]=\frac{1}{30}(4x+6)$

$$P(y)=\sum_{x=0}^{2}\frac{1}{30}(x+y)=\frac{1}{30}[(0+y)+(1+y)+(2+y)]=\frac{1}{30}(3y+3)$$

b) $P(x,y)=P(x)P(y)$ olup olmadığı araştırılırsa ve örneğin x=0 ve y=0 verilirse,

$$\frac{1}{30}(x+y)\neq\frac{1}{30}(4x+6)\frac{1}{30}(3y+3)$$

$$P(x,y)=0 \text{ ve } P(x)=\frac{1}{5},\ P(y)=\frac{1}{10}$$

olduğu görülür. O halde X ve Y bağımsız değildir.

TEOREM

X ve Y rastgele değişkenleri bağımsız iseler koşullu olasılık fonksiyonları marjinal olasılık fonksiyonlarına eşittir. Yani,

$$P(x \setminus y) = P(x) \quad , \quad P(y) \neq 0$$

$$P(y \setminus x) = P(y) \quad , \quad P(x) \neq 0$$

olur. Bu teoremin karşıtı da doğrudur.

İspat:

X ve Y bağımsız iseler $P(x, y) = P(x)P(y)$ dir.

$P(x \setminus y) = \dfrac{P(x,y)}{P(y)}$ olup buradan $P(x \setminus y)P(y) = P(x, y)$ ve

$P(x \setminus y)P(y) = P(x)P(y)$ ve $P(x \setminus y) = P(x)$. Aynı sonuç $P(y \setminus x) = P(y)$ olarak da bulunur.

6.2.5 Birikimli Ortak Olasılık Fonksiyonları

Tanım: X ve Y aynı örnek uzayda tanımlı iki kesikli rastgele değişken olsun.

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x=-\infty}^{x} \sum_{y=-\infty}^{y} P(x,y)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona X ve Y rastgele değişkenlerinin **birikimli ortak olasılık fonksiyonu** adı verilir.

Birikimli ortak olasılık fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- $F(x, y) \geq 0$
- $F(-\infty, +\infty) = 1$
- $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

6.2.6 Koşullu Beklenen Değer

Tanım: Y = y verilmişken X'in koşullu beklenen değeri

$$E[X \backslash Y = y] = \sum_{x} x.P\left(X = x \backslash Y = y\right)$$

$$= \sum_{x} x.P(x \backslash y)$$

dir.

6.2.7 Koşullu Varyans

Tanım: Y = y verilmişken X'in **koşullu varyansı**

$$V(X \backslash Y = y) = E\left\{[X - E(X \backslash y)]^2 \backslash y\right\} = E\left(X^2 \backslash y\right) - [E(X \backslash y)]^2$$

$$= \sum_{x} (X - E(X \backslash y))^2 .P(x \backslash y)$$

dır.

ÖRNEK 6.11:

X \ Y	1	2	3	4	Toplam
-1	0	0	0,1	0,2	0,3
0	0,1	0,1	0	0,1	0,3
1	0,2	0	0,1	0,1	0,4
Toplam	0,3	0,1	0,2	0,4	1

X ve Y'nin ortak olasılık fonksiyonu yukarıdaki gibi verilmiştir.

a) X rastgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

b) Y rastgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

c) E(X) ve E(Y)'yi bulunuz.

d) E(XY)'yi bulunuz.

e) X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olup olmadıklarını araştırınız.

f) $E(3X + 1)$ ve $E(2X + 4Y)$'yi elde ediniz.

g) $E(X^2 + Y)$ elde ediniz.

h) $E(Y \setminus X = 0)$ elde ediniz.

ı) $V(Y \setminus X = 0)$ elde ediniz.

ÇÖZÜM 6.11:

a)

x	-1	0	1
P(X=x)	0,3	0,3	0,4

b)

y	1	2	3	4
P(Y=y)	0,3	0,1	0,2	0,4

c) $E(X) = \sum_{x} xP(x) = (-1)(0,3) + (0)(0,3) + (1)(0,4) = 0,1$

$E(Y) = \sum_{y} yP(y) = (1)(0,3) + (2)(0,1) + (3)(0,2) + (4)(0,4) = 2,7$

d) $E(XY) = \sum_{x} \sum_{y} xyP(x,y) = (-1)(1)(0) + (-1)(2)(0) + (-1)(3)(0,1)$

$+(-1)(4)(0,2) + (0)(1)(0,1) + (0)(2)(0,1)$

$+(0)(3)(0) + (0)(4)(0,1) + (1)(1)(0,2)$

$+(1)(2)(0) + (1)(3)(0,1) + (1)(4)(0,1) = -0,2$

e) Ortak olasılık tablosunda bulunabilecek bir $P(x, y) \neq P(x).P(y)$ X ve Y'nin bağımlı iki rastgele değişken olduğunu söylemek için yeterlidir.O halde;

$$P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$$

Çünkü: $0,2 \neq (0,4)(0,3)$'dır.

f) $E(3X+1)=3E(X)+1=3(0,1)+1=1,3$

$$E(2X + 4Y) = 2E(X) + 4\,E(Y) = 2(0,1) + 4(2,7) = 11$$

g) $E(X^2 + Y) = E(X^2) + E(Y)$ olarak yazılabilir.

$$E(X^2) = 1(0,3) + 0(0,3) + 1(0,4) = 0,7$$

$$E(Y) = 2,7$$

Böylece

$$E(X^2 + Y) = 0,7 + 2,7 = 3,4$$

h) $E(Y / X = 0) = \sum_y y.P(Y \setminus X = 0)$ 'dır. Aşağıdaki tablo düzenlenir.

Y/X=0	**P(Y/X=0)=** $\frac{P(Y,X=0)}{P(X=0)}$	**E(Y/X=0)**
1	0,1/0,3	1.(0,1/0,3)
2	0,1/0,3	2.(0,1/0,3)
3	0/0,3	3.(0)
4	0,1/0,3	4.(0,1/0,3)
Toplam	1	0,7/0,3

Böylece

$$E(Y \setminus X = 0) = \frac{0,7}{0,3}$$

elde edilir.

ı) $V(Y \setminus X=0) = E(Y^2 \setminus X=0) - [E(Y \setminus X=0)]^2$

$E(Y \setminus X=0)$ bir önceki şıkta bulunmuştu. Şimdi $E(Y^2 \setminus X=0)$ bulunmalı

$Y^2 \setminus X=0$	$P(Y \setminus X=0)$	$E(Y^2 \setminus X=0)$
1	0,1/0,3	1(0,1/0,3)
4	0,1/0,3	4(0,1/0,3)
9	0	0
16	0,1/0,3	16(0,1/0,3)
Toplam	1	2,1/0,3

Buradan,

$$V(Y \setminus X=0) = \frac{2,1}{0,3} - \left(\frac{0,7}{0,3}\right)^2 = 1,56$$

TEOREM

$U = E(X\backslash Y)$ bir rastgele değişken olup beklenen değeri

$$E(U) = E[E(X \backslash Y)] = \sum_{y} E(X \backslash Y = y)P(y) = E(X)$$

şeklindedir.

Teoremin ispatı verilmeyecektir.

ÖRNEK 6.12:

X ve Y iki rastgele değişken olup ortak olasılık fonksiyonu

P(x,y)	y=0	y=1	y=2	P(x)
x = 0	0,01	0	0	0,01
x = 1	0,09	0,09	0	0,18
x = 2	0	0	0,81	0,81
P(y)	0,10	0,09	0,81	1

şeklinde verilmiştir.

a) X in marjinal olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

b) Y nin marjinal olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

c) P(X\Y=0) olasılığını bulunuz.

d) P(X\Y = 1) olasılığını bulunuz.

e) P(X\Y = 2) olasılığını bulunuz.

f) E(X\Y = 0), E(X\Y = 1), E(X\Y = 2) elde ediniz.

g) Var(X\Y = 0), Var(X\Y = 1), Var(X\Y = 2) bulunuz.

ÇÖZÜM 6.12:

Sırası ile;

a) $$P(x)=\begin{cases} 0{,}01 & x=0 \\ 0{,}18 & x=1 \\ 0{,}81 & x=2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

b) $$P(y)=\begin{cases} 0{,}10 & y=0 \\ 0{,}09 & y=1 \\ 0{,}81 & y=2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

c) $P(X\backslash Y=0)=\begin{cases} \dfrac{0,01}{0,1} & x=0 \\ \dfrac{0,09}{0,1} & x=1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

d) $P(X \backslash Y=1)=\begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

e) $P(X \backslash Y=2)=\begin{cases} 1 & x=2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

f) $E(X \backslash Y=0)=0,9$, $E(X \backslash Y=1)=1$, $E(X \backslash Y=2)=2$

g) $E(X^2 \backslash Y=0)=0,9$ $E\left[X^2 \backslash Y=1\right]=1$ $E\left[X^2 \backslash Y=2\right]=4$

$Var(X \backslash Y=0)=0,09$, $Var(X \backslash Y=1)=0$ $Var(X \backslash Y=2)=0$

olduğu bulunur.

ÖRNEK 6.13:

X rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$P(x)=\begin{cases}0,4 & x=0\\ 0,6 & x=2\\ 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$P(Y\setminus X=0)=\begin{cases}0,8 & y=0\\ 0,2 & y=1\\ 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

$$P(Y\setminus X=2)=\begin{cases}0,5 & y=0\\ 0,5 & y=1\\ 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak verilmiştir.

a) X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonunu yazınız.

b) $E(Y\setminus X=2)$ yi bulunuz.

c) $P(X\setminus Y=0)$ elde ediniz.

d) $Var(X\setminus Y=0)$ elde ediniz.

e) $U=E(X\setminus Y)$ ise U'nun olasılık fonksiyonunu elde ediniz.

f) $E(U)=E[E(X\setminus Y)]$ nedir?

ÇÖZÜM 6.13:

a) $P(y \setminus x) = \dfrac{P(x, y)}{P(x)}$ eşitliğinden $P(x, y) = P(y \backslash x)P(x)$ kullanılarak aşağıdaki tablo oluşturulur.

P(x,y)	y=0	y=1
x=0	(0,8)(0,4)	(0,2)(0,4)
x=2	(0,5)(0,6)	(0,5)(0,6)

Tablonun birinci satır, birinci sütun hücresinin değeri,

$$P(Y = 0 \setminus X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(X = 0)}$$

$$P(X = 0,\ Y = 0) = P(Y = 0 \backslash X = 0)\ .\ P(X = 0)$$

$$= (0{,}8)\ (0{,}4) = 0{,}32$$

bulunur. Tablonun diğer hücreleri aynı şekilde elde edilir.

P(x,y)	y=0	y=1	Toplam
x=0	0,32	0,08	0,40
x=2	0,30	0,30	0,60
Toplam	0,62	0,38	1,00

b) $E(Y \setminus X=2)=\sum_{y=0}^{1} y.P(Y \setminus X=2)=0(0,5)+1.(0,5)=0,5$

c) $P(X \setminus Y=0)=\dfrac{P(X,Y=0)}{P(Y=0)}=\begin{cases} 0{,}32/0{,}62 & x=0 \\ 0{,}30/0{,}62 & x=2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

d) Önce $E(X \setminus Y=0)$ ve $E(X^2 \setminus Y=0)$ bulunmalıdır.

$$E(X/Y=0) \quad = \sum_x xP(X \setminus Y=0) = 0\left(\frac{0{,}32}{0{,}62}\right)+2\left(\frac{0{,}30}{0{,}62}\right)=\frac{30}{31}$$

$$E(X^2 \setminus Y=0) = \sum_x x^2P(X \setminus Y=0) = 0^2\left(\frac{0{,}32}{0{,}62}\right)+2^2\left(\frac{0{,}30}{0{,}62}\right)=\frac{60}{31}$$

$$Var(X \setminus Y=0)=E(X^2 \setminus Y=0)-[E(X \setminus Y=0)]^2$$

$$=\frac{60}{31}-\left(\frac{30}{31}\right)^2=\frac{960}{961}$$

e) $U=E(X \setminus Y)$ olduğundan önce $E(X \setminus Y)$ bulunmalıdır.

$E(X \setminus Y=0)=\dfrac{30}{31}$ olarak bulunmuştu.

$E(X \setminus Y=1)=\dfrac{30}{19}$ olarak bulunur. Bunun için özellikle

$$P(X \setminus Y=1)=\frac{P(X,Y=1)}{P(Y=1)}=\begin{cases}\dfrac{0,08}{0,38} & x=0\\[2ex] \dfrac{0,3}{0,38} & x=2\\[2ex] 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

yazılır. Buradan

$$E(X \setminus Y=1)=\sum_{x=0}^{2} x\ \ P(X \setminus Y=1)=0\cdot\left(\frac{0,08}{0,38}\right)+2\left(\frac{0,3}{0,38}\right)=\frac{30}{19}$$

olarak elde edilir. Bu iki beklenen değer kullanılarak

$$E(X \setminus Y)=\begin{cases}\dfrac{30}{31} & x=0\\[2ex] \dfrac{30}{19} & x=2\end{cases}$$

elde edilir. Ancak asıl aranan bu ifadenin olasılık fonksiyonu olduğuna göre ortak olasılık fonksiyonu tablosundan

$$P(y)=\begin{cases} 0,62 & y=0 \\ 0,38 & y=1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$P(u)=\begin{cases} 0,62 & u=30/31 \\ 0,38 & u=30/19 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

yazılabilir.

f) $E(U)=(0,62)\cdot\frac{30}{31}+(0,38)\cdot\frac{30}{19}=1,2$

6.3 SÜREKLİ RASTGELE DEĞİŞKENLER

6.3.1 Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Tanım: X ve Y sürekli rastgele değişkenler ise ve

1. $f(x, y) \geq 0$ tüm x, y ler için

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\, dy = 1$

olacak şekilde bir f(x, y) fonksiyonu varsa, bu fonksiyona **ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu** adı verilir.

6.3.2 Marjinal Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Tanım: X ve Y sürekli rastgele değişkenler olup f(x, y) bir ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

X in **marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,**

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Y nin **marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu** adını alır.

6.3.3 Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Tanım: X ve Y sürekli rastgele değişkenler ve f(x,y) ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları ise f(y) > 0 olmak üzere;

$$f(x \setminus y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

fonksiyonuna Y = y verilmişken X in **koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu** adı verilir. f(x) > 0 olmak üzere

$$f(y \setminus x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

fonksiyonuna X = x verilmişken Y nin **koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu** adı verilir.

6.3.4 Birikimli Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Tanım: X ve Y aynı örnek uzayda tanımlı iki sürekli rastgele değişken olsun.

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1,t_2)dt_2dt_1 \qquad \begin{matrix} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{matrix}$$

olacak şekilde negatif olmayan bir f(x, y) fonksiyonu varsa F(x,y) **birikimli ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur** denir. Fonksiyonda karışıklık olmaması için x,y yerine t_1,t_2 kullanılmıştır.

Özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$
- $F(\infty, \infty) = 1$

ÖRNEK 6.14:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y) & 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

f(x, y) olasılık yoğunluk fonksiyonunun

a) X ve Y rastgele değişkenleri için marjinal yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

b) F(x,y) elde ediniz.

c) f(x\y) elde ediniz.

ÇÖZÜM 6.14:

a) X rastgele değişkeninin marjinali;

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad \text{den dolayı} \qquad f(x)=\int_0^1 (x+y)dy = x+\frac{1}{2}$$

ve Y rastgele değişkeninin marjinali,

$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \qquad \text{den dolayı} \qquad f(y)=\int_0^1 (x+y)dx = y+\frac{1}{2}$$

elde edilir.

b) $$F(x,y)=\int_0^x \int_0^y (t_1+t_2)dt_2 dt_1$$

$$=\int_0^x \left(t_1\cdot t_2+\frac{t_2^2}{2}\bigg|_0^y\right) dt_1$$

$$=\int_0^x \left(t_1 y+\frac{y^2}{2}\right)dt_1 = \left(\frac{t_1^2 y}{2}+\frac{y^2 t_1}{2}\right)\bigg|_0^x$$

$$=\frac{x^2 y}{2}+\frac{y^2 x}{2}=\frac{xy(x+y)}{2}$$

c) $$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}=\frac{2x+2y}{2y+1}$$

6.3.5 Bağımsız Sürekli Rastgele Değişkenler

Tanım: X ve Y sürekli rastgele değişkenler ve f(x, y) olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. f(x) ve f(y) bu fonksiyonun marjinalleri olup

f(x, y) = f(x) f(y)

eşitliği varsa X ve Y her reel (x, y) çifti için **bağımsızdır** denir. Tersi de doğrudur.

Bu durumda $E(XY) = E(X)E(Y)$ olup aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy.f(x,y)dxdy \text{ ve}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = \mu_x$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y.f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f(y)dy = \mu_y$$

ÖRNEK 6.15:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y) & 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu verildiğine gore;

a) $X=\frac{1}{2}$ verilmişken Y'nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde ediniz.

b) Y = 0,36 verilmişken X' in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde ediniz.

c) X ve Y nin bağımsız olup olmadığını kontrol ediniz.

d) F (0,5 ; 0,8) bulunuz.

ÇÖZÜM 6.15:

$$\textbf{a)}\ f\left(y \setminus x=\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2},y\right)}{f\left(x=\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+y}{1}=\frac{1}{2}+y$$

$$\textbf{b)}\ f(y)=\frac{2y+1}{2} \text{ ve } f(y=0,36)=\frac{1,72}{2} \text{ olduğundan}$$

$$f(x \setminus y=0,36)=\frac{2(x+0,36)}{1,72}=\frac{x+0,36}{0,86}$$

$$\textbf{c)}\ f(x,y)=f(x).f(y)$$

$$x+y \neq \left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{2y+1}{2}\right)$$

kontrolü yapılmalıdır.

O halde X ve Y bağımsız değildir.

$$\textbf{d)}\ F(0,5\ ;\ 0,8)=\int_0^{0,5}\int_0^{0,8}(x+y)dydx=0,26$$

6.4 İKİ RASTGELE DEĞİŞKENİN KOVARYANSI VE KORELASYONU

X ve Y gibi iki rastgele değişkenden biri artarken veya azalırken diğeri de buna bağlı olarak artıyor veya azalıyorsa bu iki rastgele değişken **bağımlıdır** denir. Bağımlılığın iki önemli ölçüsünden biri **kovaryans** diğeri **korelasyon**dur.

Tanım:_ X ve Y, ortalamaları sırası ile $E(X)=\mu_x$ ve $E(Y)=\mu_y$ olan iki rastgele değişken ise aralarındaki kovaryans

$$\mathbf{Kov(X,Y) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)]} \quad \mathbf{= E(XY) - E(X)E(Y)}$$
$$\mathbf{= E(XY) - \mu_x \mu_y}$$

olarak bilinir. Kov(X, Y) = Kov (Y, X) olduğu açıktır.

Ayrıca Kov (X, X) = Var(X) = σ_x^2 dir.

TEOREM

X ve Y bağımsız rastgele değişkenler ise

Kov(X, Y) = 0 olur.

İspat: $\text{Kov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$ ifadesinde X ve Y bağımsız ise $E[XY] = E[X]\,E[Y] = \mu_X \mu_Y$ yazılabileceğinden

$\text{Kov}(X, Y) = 0$

bulunur. Bu teoremin tersi doğru olmayabilir. Yani iki rastgele değişkenin aralarındaki kovaryans sıfır ise bu iki değişken bağımsız olmayabilirler.

Tanım: X ve Y gibi iki rastgele değişkenin toplamının varyansı

$$\mathbf{Var(X+Y)=Var(X) + Var(Y) + 2Kov(X, Y)}$$

olarak hesaplanır. İki rastgele değişkenin farkının varyansı

$$\mathbf{Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Kov(X, Y)}$$

olur. X ve Y bağımsız ise; Kov(X, Y) = 0 olur.

Kovaryans; X ve Y rastgele değişkenlerinin büyüklüklerinden etkilenir. Bu yüzden X ve Y arasındaki kovaryans ile ilişki ya "büyüktür" veya "küçüktür" şeklinde yorumlanır. $-\infty < \text{Kov}(X, Y) < +\infty$

Kov(X, Y) değeri X ve Y rastgele değişkenlerinin standart sapmalarına bölünerek ilişkinin derecesi de ifade edilir.

Tanım: X ve Y gibi iki rastgele değişken arasındaki ilişki **korelasyon katsayısı** ile

$$\rho_{xy} = \frac{\mathbf{Kov(X,Y)}}{\sigma_x \sigma_y}$$

şeklinde verilir. Korelasyon katsayısı; $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ dir. $\rho_{xy} = 0$ olması X ve Y arasında **doğrusal ilişki** olmadığını gösterir. $\rho_{XY} < 0$ olması ters yönde bir ilişkiyi $\rho_{XY} > 0$ olması ise aynı yönde ilişkiyi gösterir. $\rho_{XY} = -1$, ters yönde tam bir ilişkiyi, $\rho_{XY} = +1$, aynı yönde tam bir ilişkiyi gösterir. Sıfırdan uzaklaştıkça ilişkinin derecesi güçlenir.

TEOREM

X ve Y rastgele değişkenleri $Y = aX+b$ eşitliğini sağlıyorsa

$$\rho_{xy} = \begin{cases} -1 & a < 0 \\ 0 & a = 0 \\ 1 & a > 0 \end{cases}$$

dır. Ayrıca $\rho_{XY} = \rho_{YX}$ dir. Örnekten elde edilen korelasyon katsayısı r_{XY} şeklinde gösterilecektir.

ÖRNEK 6.16:

Aşağıda bir olasılık tablosu verilmiştir. Kov(X, Y) değerini elde ediniz.

P(X=x, Y=y)	y=0	y=1	y=2	P(x)
x=0	0,02	0	0	0,02
x=1	0,36	0,08	0	0,44
x=2	0,05	0,40	0,09	0,54
P(y)	0,43	0,48	0,09	1,00

ÇÖZÜM 6.16:

$$E[XY] = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyP(x, y)$$

$$= (0)\,(0)\,(0{,}02) + (0)\,(1)\,(0) + (0)\,(2)\,(0) + (1)\,(0)\,(0{,}36)$$

$$+ (1)\,(1)\,(0{,}08) + (1)\,(2)\,(0) + (2)\,(0)\,(0{,}05) + (2)(1)\,(0{,}40)$$

$$+ (2)\,(2)\,(0{,}09) = 1{,}24$$

$$E[X] = (0)\,(0{,}02) + (1)\,(0{,}44) + 2\,(0{,}54) = 1{,}52$$

$$E[Y] = (0)\,(0{,}43) + (1)\,(0{,}48) + (2)\,(0{,}09) = 0{,}66$$

elde edilir. Böylece

$$\mathrm{Kov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y] = 1{,}24 - (1{,}52)\,(0{,}66) = 0{,}24$$

ÖRNEK 6.17:

X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y)=\begin{cases} y & 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. Kov(X, Y) değerini bulunuz.

ÇÖZÜM 6.17:

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^1 (xy)(y)dxdy = \frac{4}{3}$$

$$E(X) = \int_0^2 \int_0^1 (x)(y)dxdy = 1$$

$$E(Y) = \int_0^2 \int_0^1 (y)(y)dxdy = \frac{8}{3}$$

Böylece

$$\text{Kov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$

$$= \frac{4}{3} - 1 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

ÖRNEK 6.18:

X ve Y iki rastgele değişken olup olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y) & 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak verilmiştir. X ve Y arasındaki korelasyon katsayısını bulunuz.

ÇÖZÜM 6.18:

$$E[XY]=\frac{1}{3}\int_0^2\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{2}{3}$$

$$E[X]=\frac{1}{3}\int_0^2\int_0^1 x(x+y)dxdy=\frac{5}{9}$$

$$E[Y]=\frac{1}{3}\int_0^2\int_0^1 y(x+y)dxdy=\frac{11}{9}$$

$$Kov(X,Y)=E(XY)-E[X]E[Y]=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\cdot\frac{11}{9}=-\frac{1}{81}$$

$$\sigma_x^2=E[X^2]-[E(X)]^2=\frac{1}{3}\int_0^2\int_0^1 x^2(x+y)dxdy-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{7}{18}-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{13}{162}$$

$$\sigma_y^2=E[Y^2]-\left[E(Y)\right]^2=\frac{1}{3}\int_0^2\int_0^1 y^2(x+y)dxdy-\left(\frac{11}{9}\right)^2=\frac{16}{9}-\left(\frac{11}{9}\right)^2=\frac{23}{81}$$

Buradan

$$\rho_{XY}=\frac{Kov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-\frac{1}{81}}{\sqrt{\frac{13}{162}}\sqrt{\frac{23}{81}}}=-0,082$$

elde edilir.

YORUM: X ve Y arasında ilişki olduğu söylenemez. Çünkü ilişki katsayısı sıfıra çok yakın bir değer olarak elde edildi.

TEOREM

Y_1, Y_2, … , Y_n ve X_1, X_2, …, X_n rastgele değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları a_1, a_2, … , a_n ve b_1, b_2, …, b_n sabitler olmak üzere

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i \qquad \text{ve} \qquad U_2 = \sum_{j=1}^{k} b_j X_j$$

şeklinde ise ve $E[Y_i] = \mu_i$ ve $E[X_j] = \mu_j$ olduğunda aşağıdaki eşitlikler yazılır.

a) $$E[U_1] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$$

b) $$Var[U_1] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Kov(Y_i Y_j)$$

Bu eşitlikler sadece i < j olan bütün (i, j) çiftleri için yazılır. U_2 için de benzer eşitlikler yazılabilir.

c) $$Kov[U_1, U_2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Kov(Y_i, X_j)$$

ÖRNEK 6.19:

X, Y ve Z gibi üç rastgele değişken alınsın. $E(X)=-2$, $E[Y]=1$, $E[Z]=3$, $Var(X)=1$, $Var(Y)=1$, $Var(Z)=4$ $Kov(X,Y)=-0{,}05$ $Kov(X,Z)=0{,}10$ $Kov(Y,Z)=1$ verilmişse

a) $U_1 = X - 2Y - 3Z$ in beklenen değer ve varyansını bulunuz.

b) $U_2 = 5X - 2Y$ ise $Kov(U_1, U_2)$ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 6.19:

$U_1 = a_1X + a_2Y + a_3Z$ olup

$E[U_1] = a_1E[X] + a_2E[Y] + a_3E[Z]$ dir.

a) $a_1 = 1, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = -3$ olduğundan

$$E(U_1) = E[X - 2Y - 3Z]$$
$$= E[X] -2\,E[Y] -3E[Z]$$
$$= 1(-2) - 2(1) - 3(3) = -13$$

Ayrıca

$$Var[U_1] = a_1^2Var(X) + a_2^2Var(Y) + a_3^2Var(Z) + 2a_1a_2Kov(X,Y)$$
$$+ 2a_1.a_3Kov(X,Z) + 2a_2a_3Kov(Y,Z)$$

$$Var[U_1] = (1)^2(1) + (-2)^2(1) + (-3)^2 4 + 2(1)(-2)(-0,005)$$
$$+2(1)(-3)(0,10) + 2(-2)(-3)(1) = 52,6$$

b) $U_2 = b_1X + b_2Y$ olup $b_1 = 5$ ve $b_2 = -2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathrm{Kov}(U_1, U_2) &= a_1b_1\mathrm{Kov}(X,X) + a_1b_2\mathrm{Kov}(X,Y)\\ &+ a_2b_1\mathrm{Kov}(Y,X) + a_2b_2\mathrm{Kov}(Y,Y)\\ &+ a_3b_1\mathrm{Kov}(Z,X) + a_3b_2\mathrm{Kov}(Z,Y)\end{aligned}$$

ve

$$\mathrm{Kov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_x^2 = 1$$

$$\mathrm{Kov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y) = \sigma_y^2 = 1 \quad \text{ve}$$

$$\mathrm{Kov}(Z,Z) = \mathrm{Var}(Z) = \sigma_z^2 = 4$$

olup

$$\mathrm{Kov}(X,Y) = \mathrm{Kov}(Y,X) = -0,05$$

$$\mathrm{Kov}(X,Z) = \mathrm{Kov}(Z,X) = 0,10$$

$$\mathrm{Kov}(Y,Z) = \mathrm{Kov}(Z,Y) = 1$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Kov}(U_1, U_2) &= (1)(5)(1) + (1)(-2)(-0,05) + (-2)(5)(-0,05)\\ &+ (-2)(-2)(1) + (-3)(5)(0,10) + (-3)(-2)(1)\\ &= 14,1\end{aligned}$$

YORUM: $\mathrm{Kov}(U_1, U_2) \neq 0$ olduğundan U_1 ve U_2 bağımlıdır.