Hafta 6

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

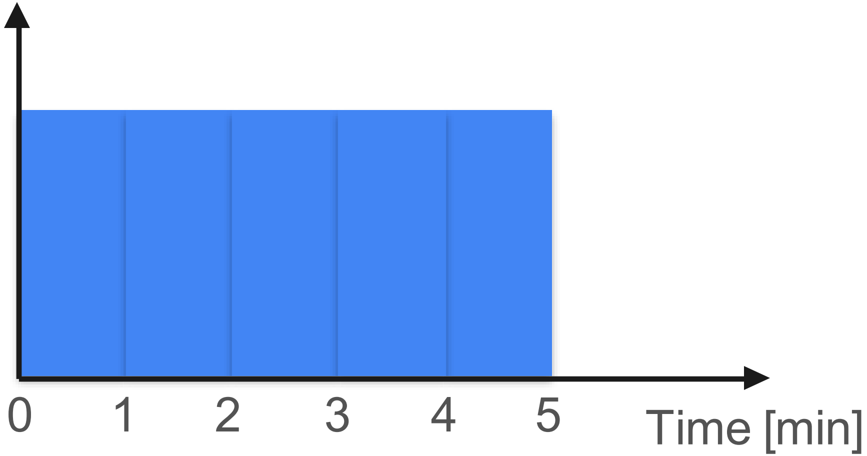
DeepLearning.AI

Olasılık Dağılımları

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

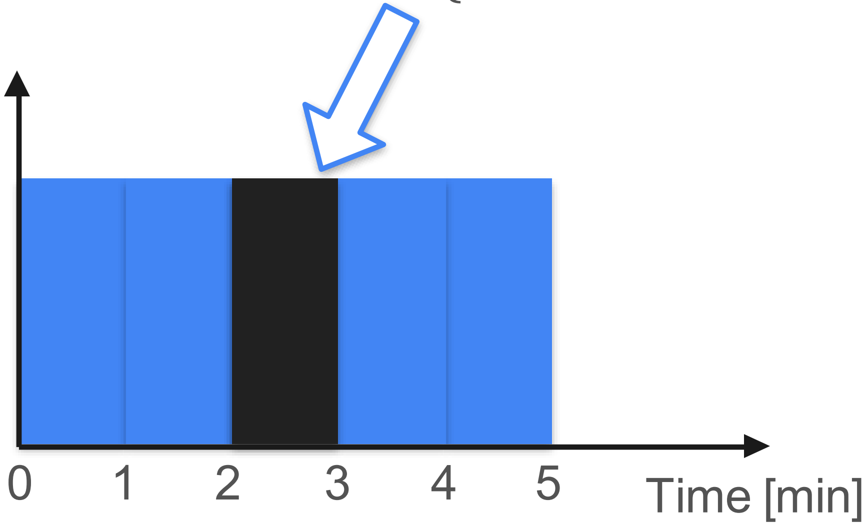
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Diyelimki çağrı merkezi 0 ile 5 dakika arasındaki herhangi bir zaman aralığında eşit olasılıkla cevap veriyor.



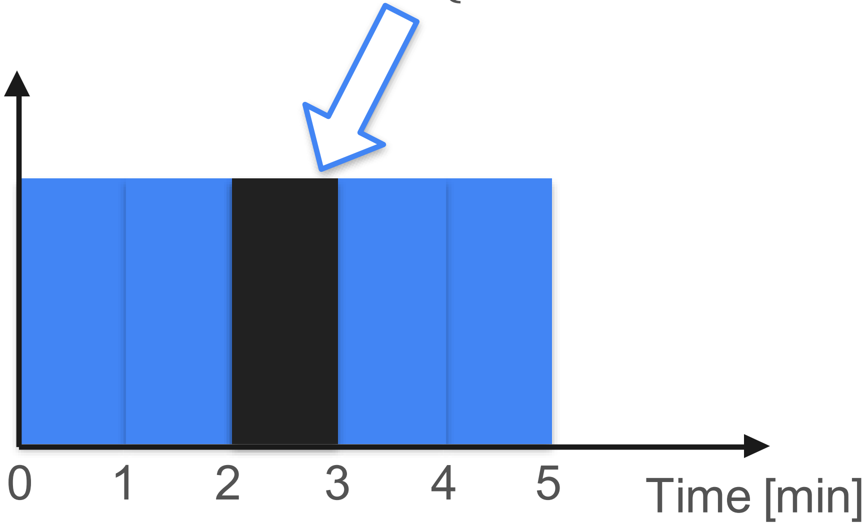
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$\mathbf{P}(\text{2 ile 3 dk. arasında olma olasılığı}) = \ ?$



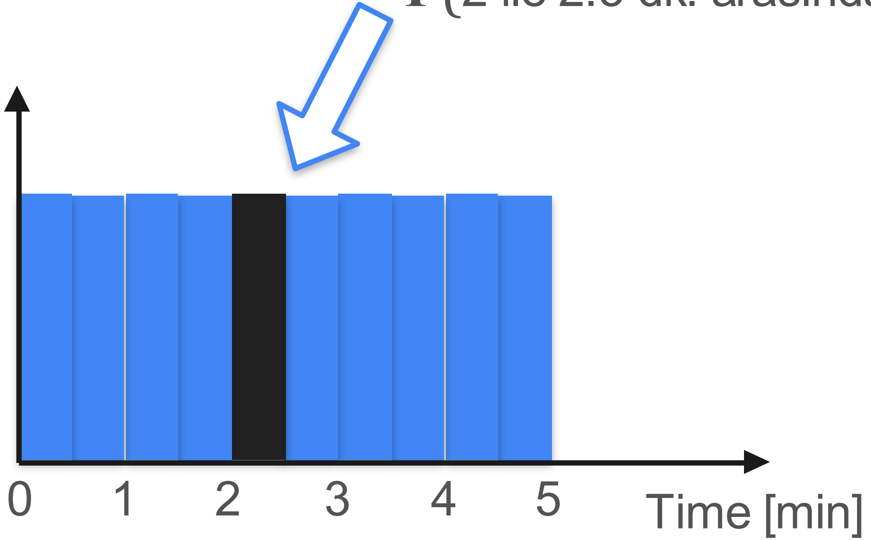
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$\mathbf{P}($2 ile 3 dk. arasında olma olasılığı$) = 1/5$



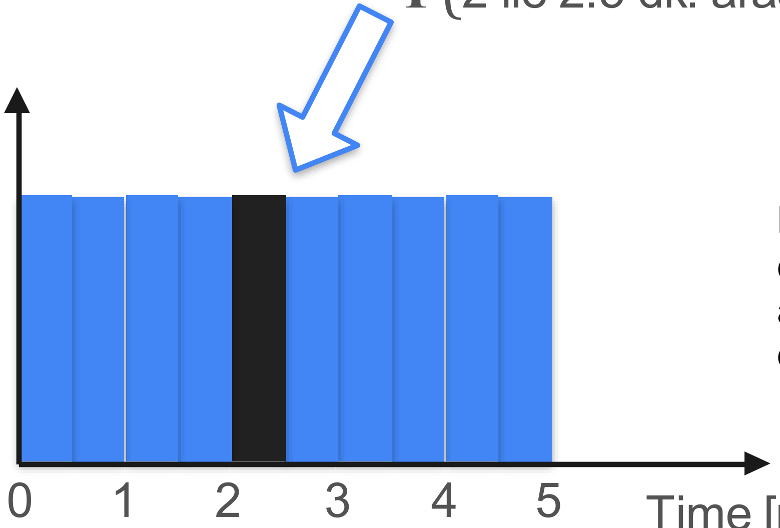
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$\mathbf{P}($2 ile 2.5 dk. arasında olma olasılığı$) = ?$



Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

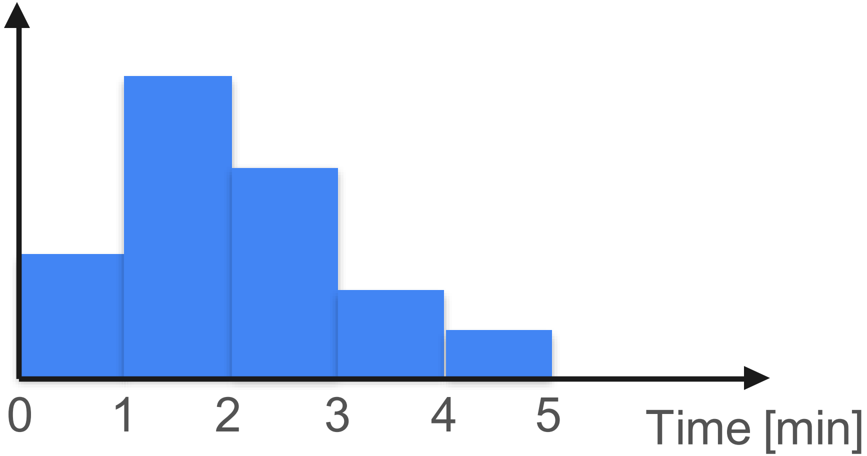
$\mathbf{P}($2 ile 2.5 dk. arasında olma olasılığı$) = 0.1$



Burada fark edebileceğiniz şey, dikdörtgenin yüksekliğinin hiç değişmediği, ancak genişliklerinin yarıya indirildiği ve bu nedenle olasılıkların da yarıya indiği görülmektedir.

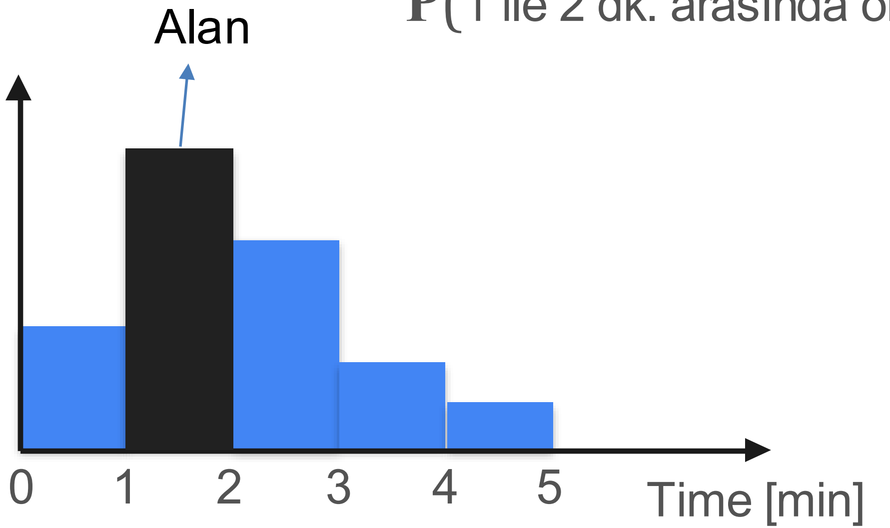
Ayrıktan Sürekliye

$\mathbf{P}($1 ile 2 dk. arasında olma olasılığı$) = ?$



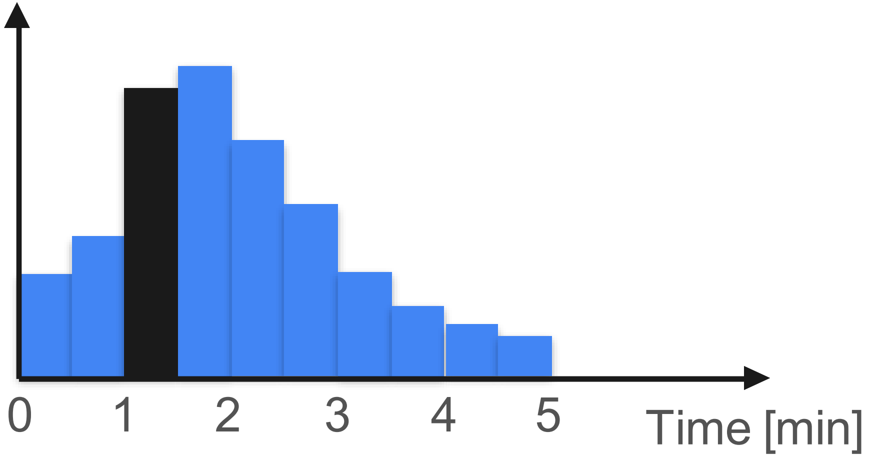
Ayrıktan Sürekliye

$\mathbf{P}($1 ile 2 dk. arasında olma olasılığı$)$



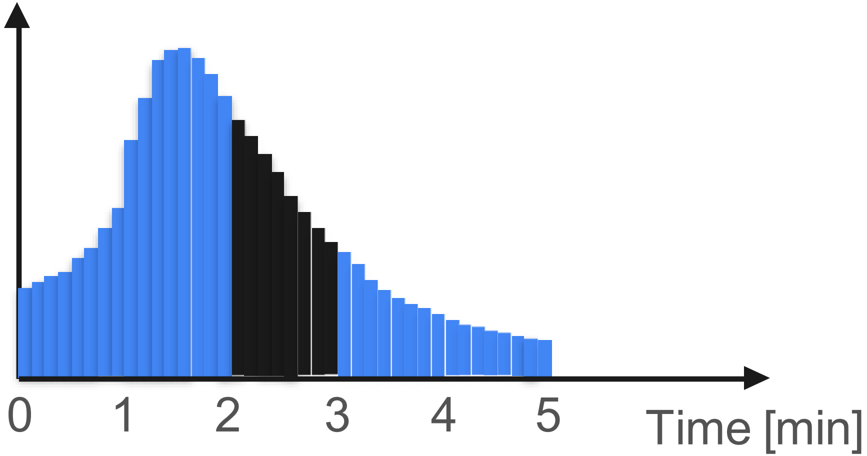
Ayrıktan Sürekliye

$\mathbf{P}($1 ile 1.30 dk. arasında olma olasılığı$)$

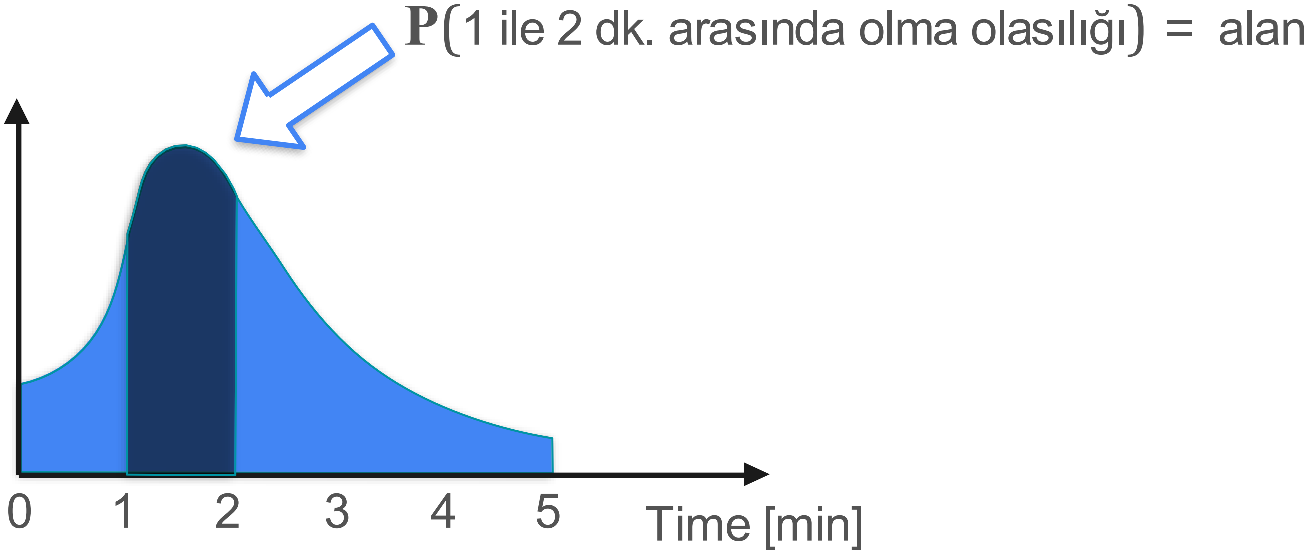


Ayrıktan Sürekliye

$\mathbf{P}\big($2 ile 3 dk. arasında olma olasılığı$\big)$ = siyah alanların toplamı

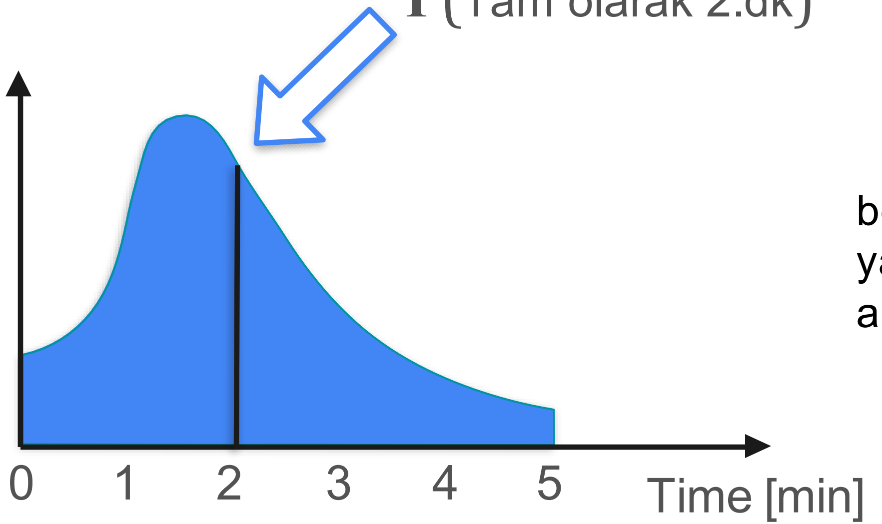


Ayrıktan Sürekliye



Soru

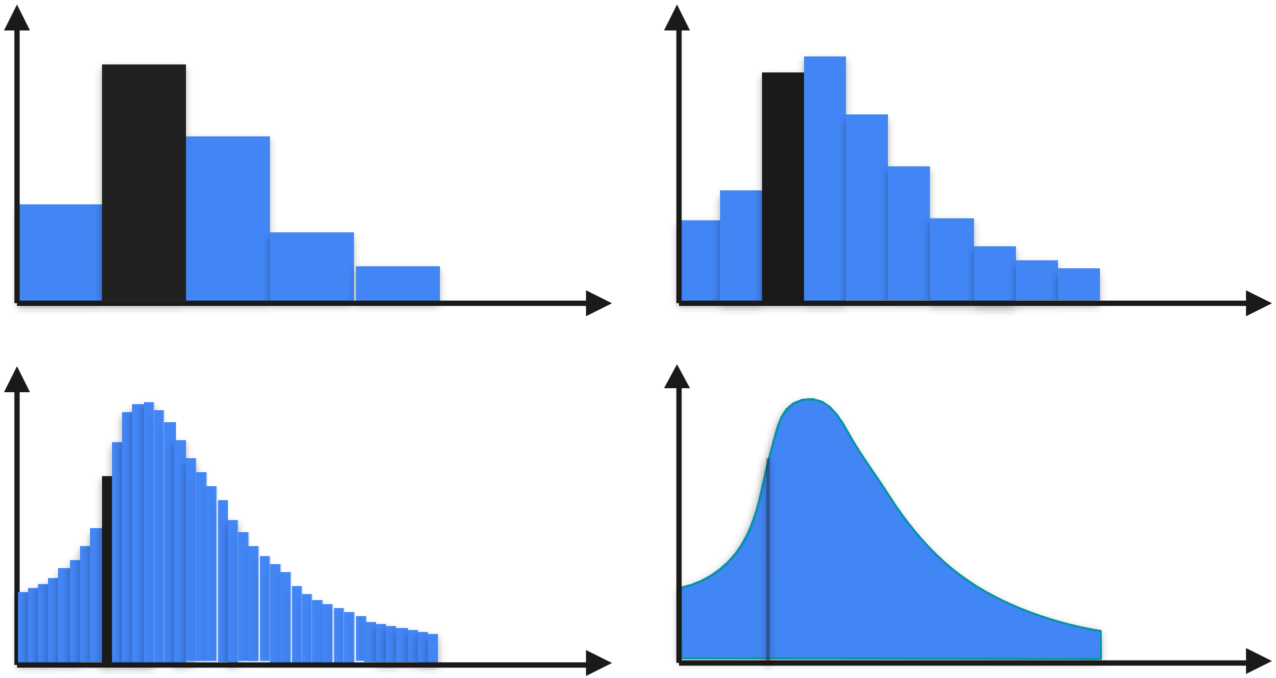
$\mathbf{P}(\text{Tam olarak 2.dk})$ alan $= 0$



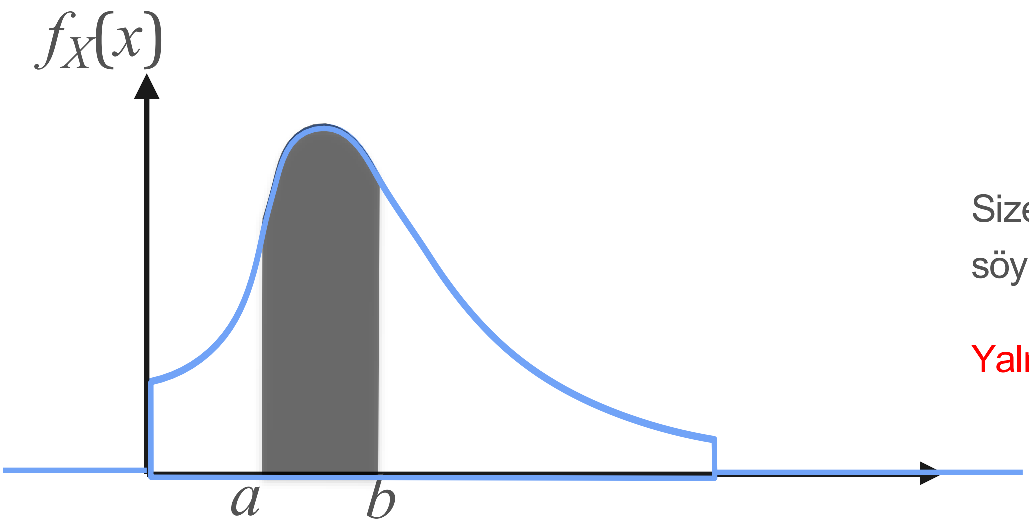
belirli bir zaman değil,
yalnızca farklı zaman pencereleri
arasındaki olasılıkları düşünmeliyiz

Ayrıktan Sürekliye

Özetlemek gerekirse, aralıkları küçüldükçe, alanlar da sıfıra gelene kadar küçülür. Bu yüzden sadece yüksekliklere değil aralıklara bakılması gerekir.



Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu : Tanım



Probability Density Function (PDF)
(Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (PDF))

$f_X(x)$

Size her nokta etrafında olasılık biriktirme oranınızı söyler.

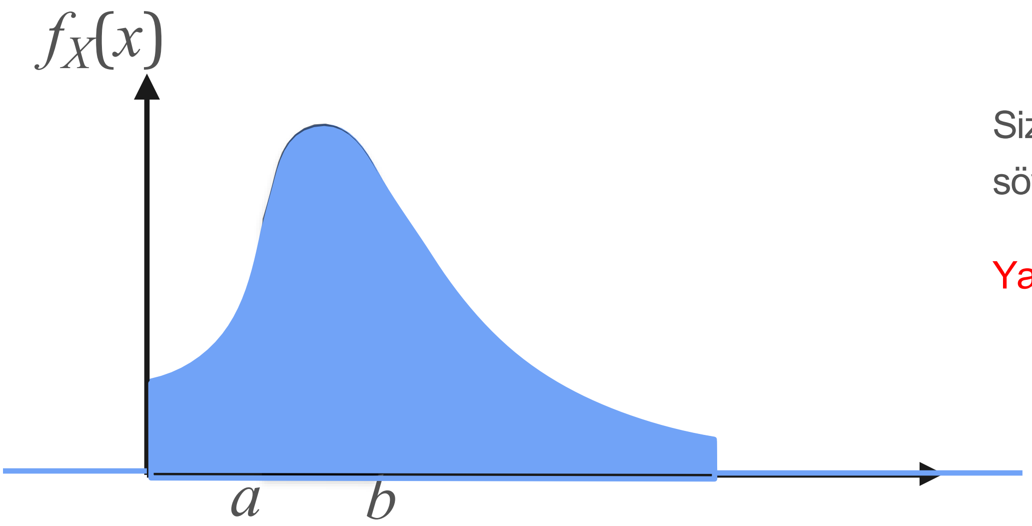
Yalnızca sürekli değişkenler için tanımlıdır!

$\mathbf{P}(a < X < b) = f_X(x)$'in altında kalan alan

$f_X(x)$:

- Tüm sayılar için tanımlıdır
- $f_X(x) \geq 0$

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu : Tanım



$f_X(x)$

Size her nokta etrafında olasılık biriktirme oranınızı söyler.

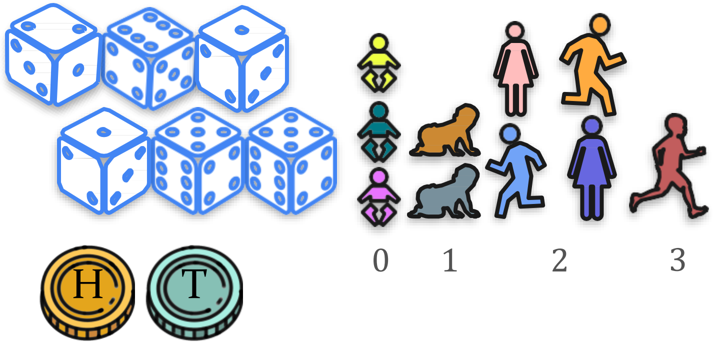
Yalnızca sürekli değişkenler için tanımlıdır!

$f_X(x)$:

- Altında kalan alan $f_X(x) = 1$

Ayrık ve Sürekli Rastlantı Değişkenleri

Ayrık rastlantı değişkenleri



Yalnızca sonlu veya en fazla sayılabilir sayıda değer alabilir

PMF: $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$

Sürekli rastlantı değişkenleri

Belirli bir aralıkta değer alır (sonsuz olasılıklar!)

PDF: $f_X(x)$

$\mathbf{P}(X = x) = 0 \quad \forall x$

DeepLearning.AI

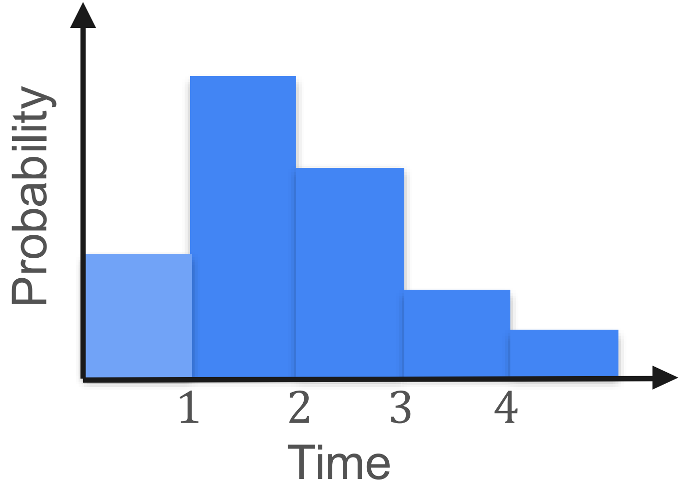
Olasılık Dağılımları

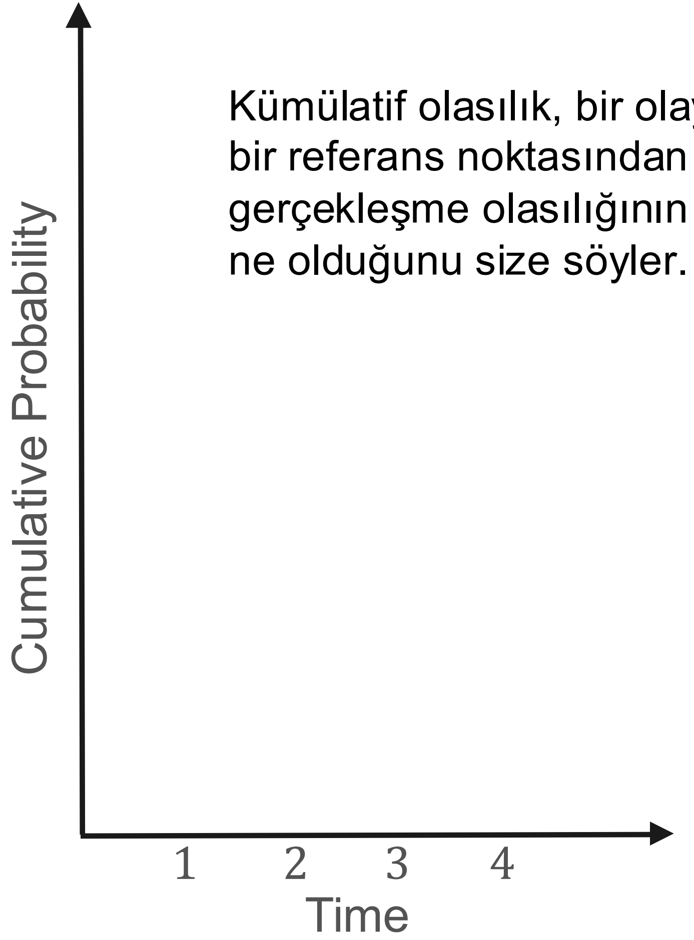
Kümülatif Dağılım Fonksiyonu

Kümülatif dağılım fonksiyonu, örneğin aramanın sıfır ile belirli bir dakika sayısı arasında olma olasılığını gösteren bir fonksiyondur ve hesaplanması çok daha kolaydır.

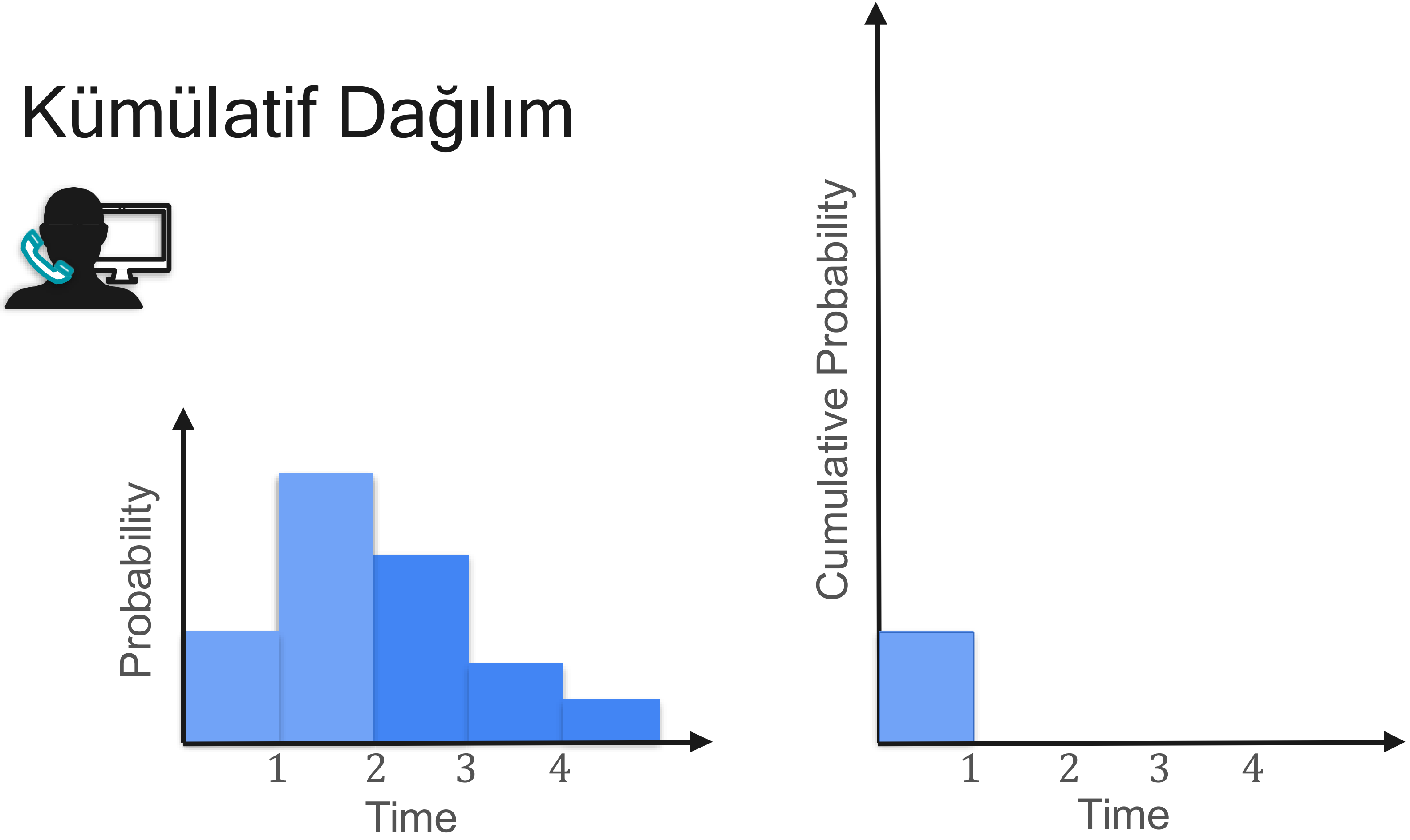
Kümülatif Dağılım

Kümülatif olasılık, bir olayın bir referans noktasından önce gerçekleşme olasılığının ne olduğunu size söyler.

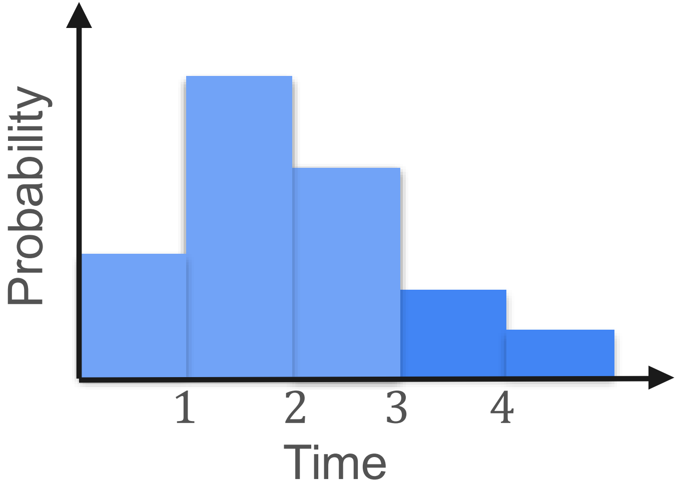


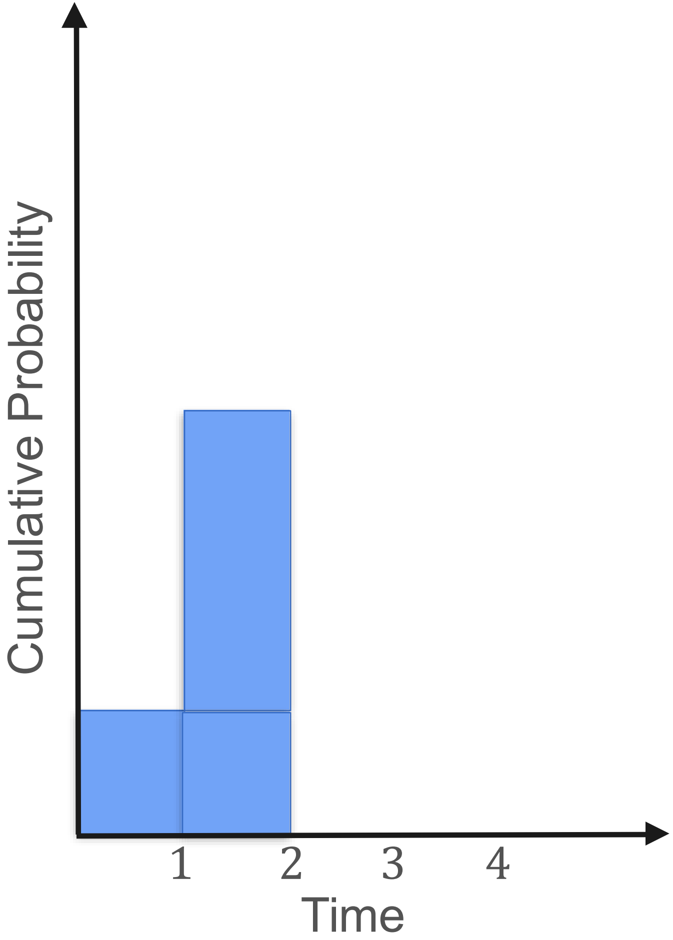


Kümülatif Dağılım

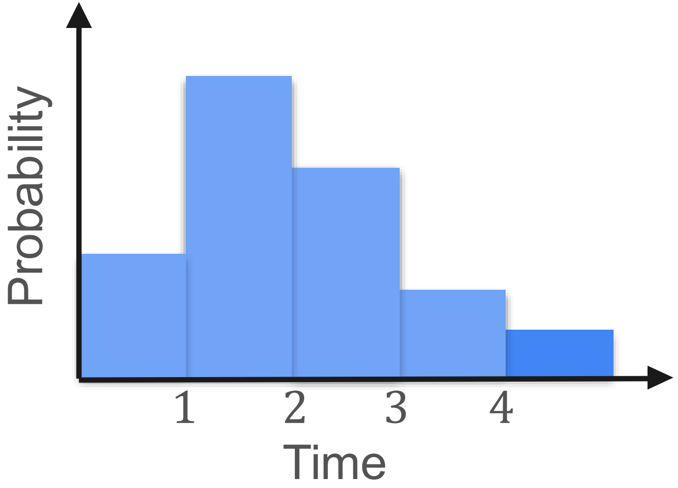


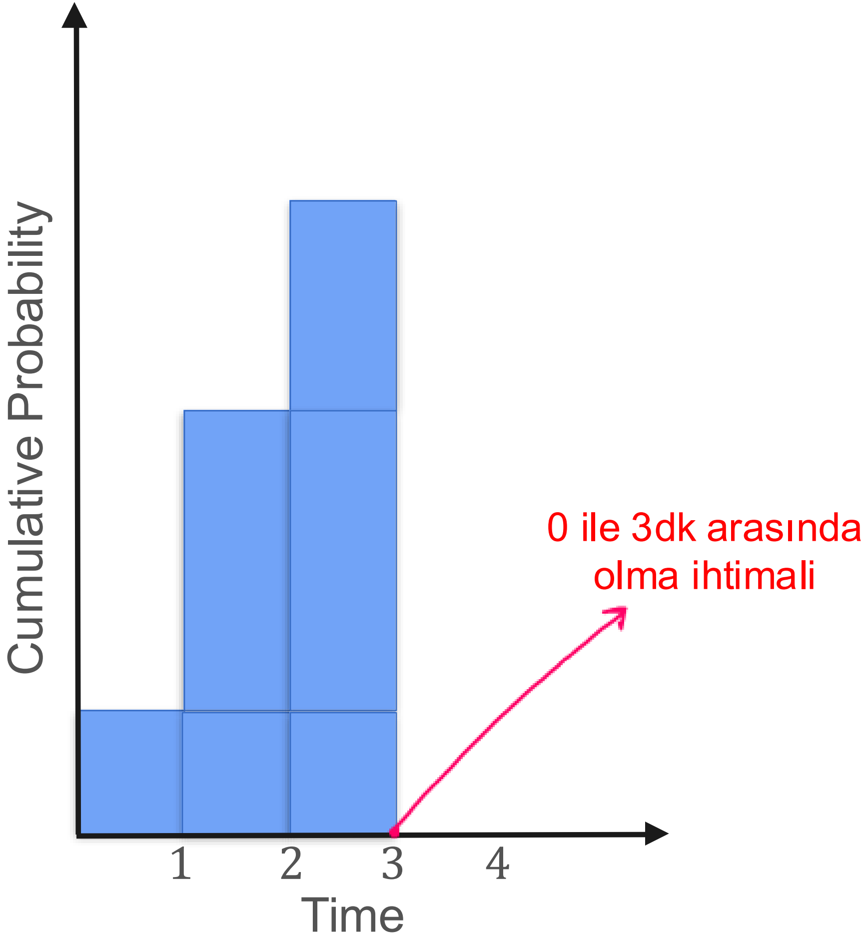
Kümülatif Dağılım



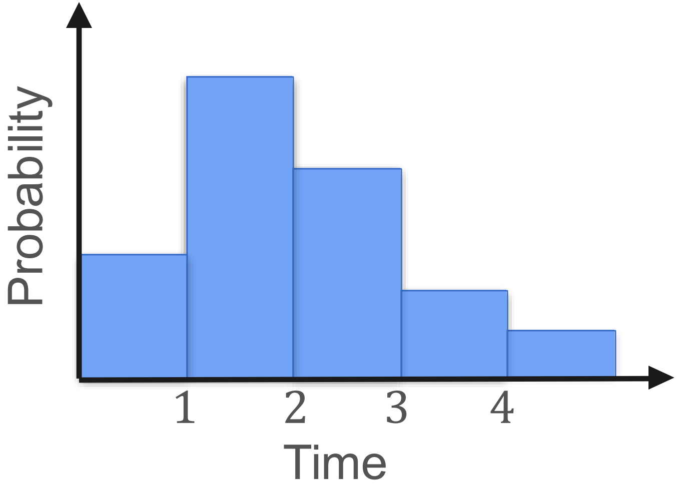


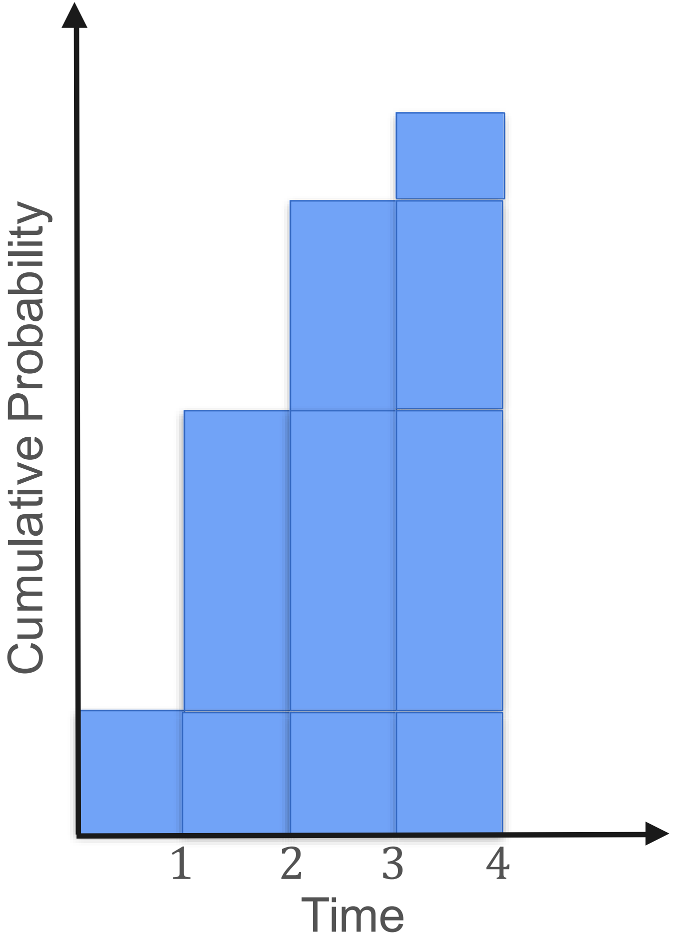
Kümülatif Dağılım





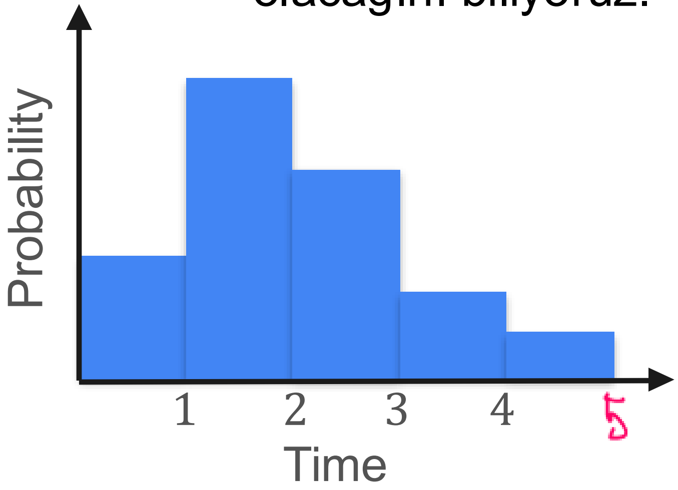
Kümülatif Dağılım

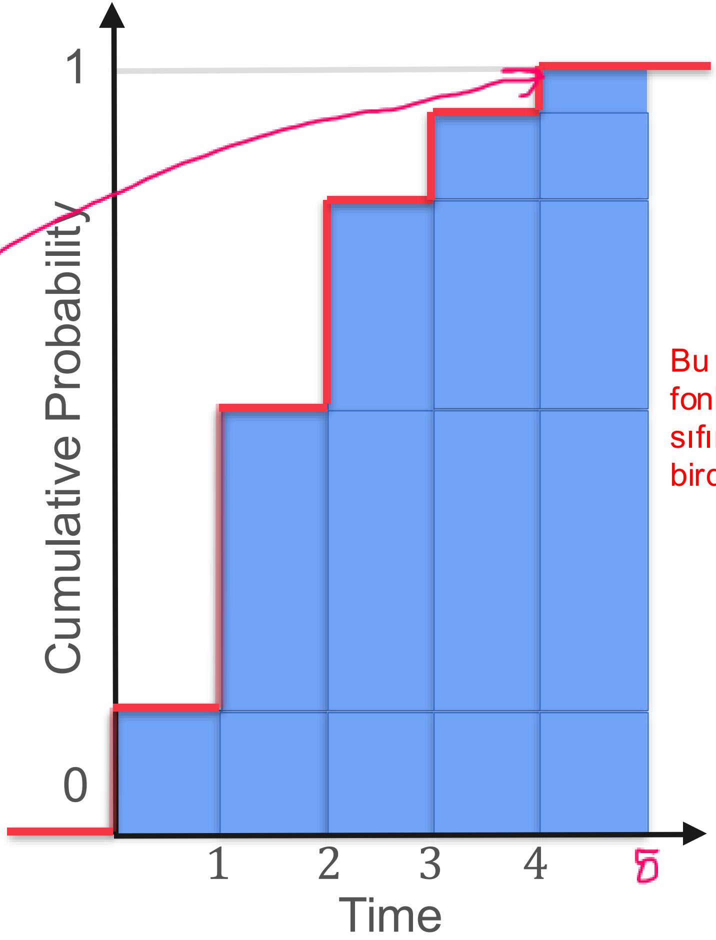




Kümülatif Dağılım

en sağdaki değer birdir, çünkü tüm aramaların beş dakika veya daha az olacağını biliyoruz.

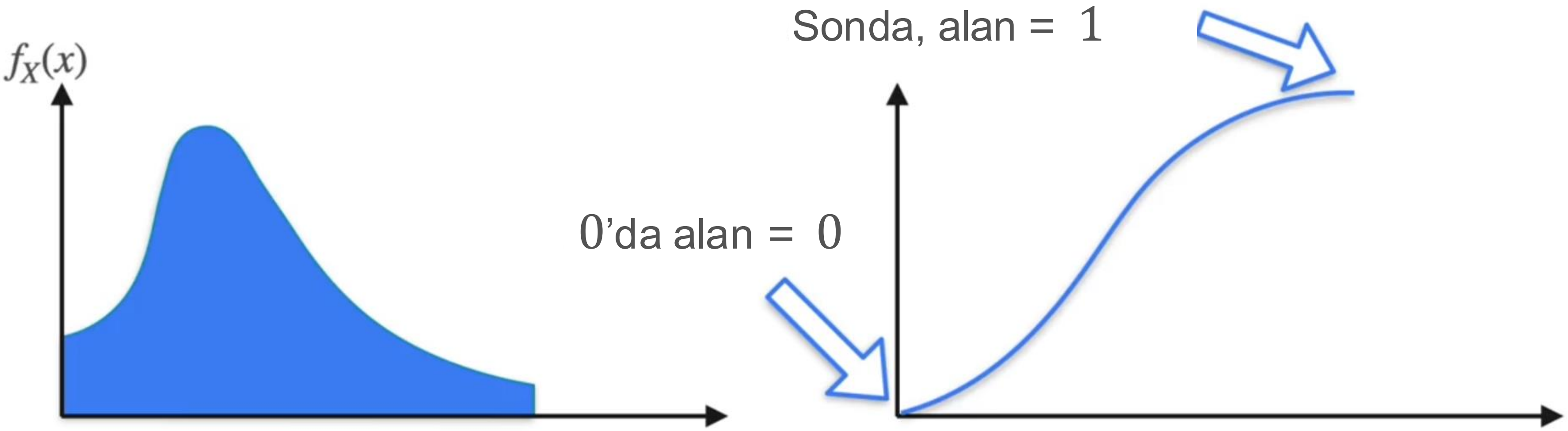




Bu kümülatif dağılım fonksiyonu her zaman sıfırdan başlar ve birde biter.

Kümülatif Dağılım

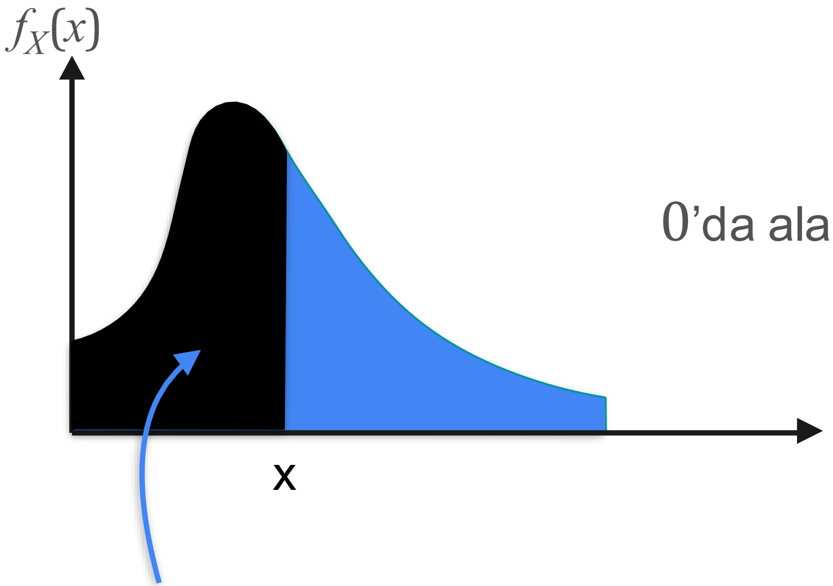
CDF: Kümülatif Dağılım Fonksiyonu



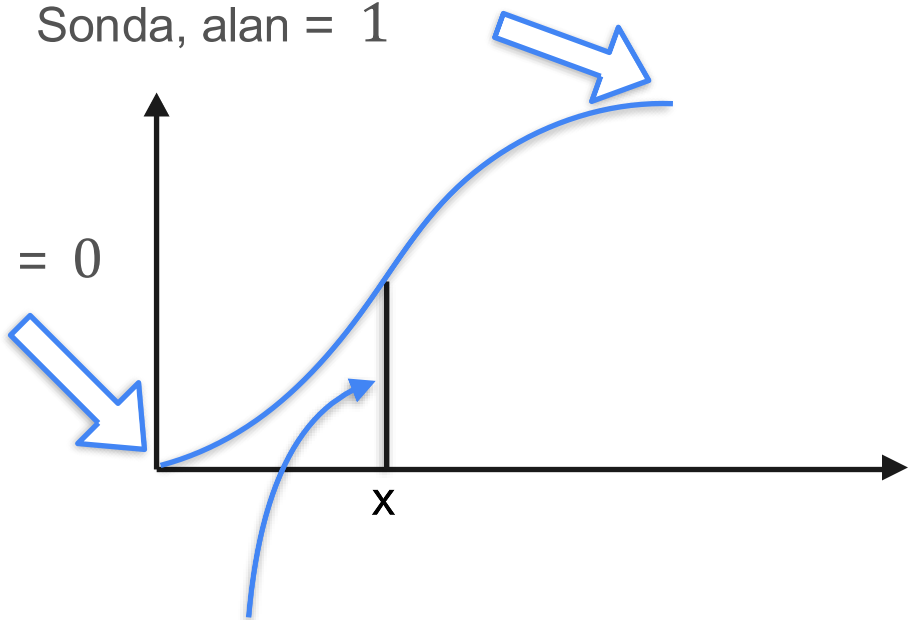
Soldaki grfikten olasılıkları bulmak için alanları hesaplamamız gerekiyor ve sağdaki grafikte sadece yüksekliklere bakmamız gerekiyor.

Kümülatif Dağılım

CDF: CDF: Kümülatif Dağılım Fonksiyonu



$\mathbf{P}$(2 dakikadan az veya eşit) = 0.5



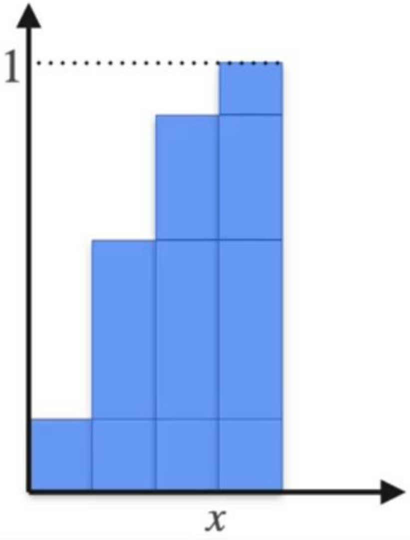
$\mathbf{P}$(2 dakikadan az veya eşit) = 0.5

CDF, rastgele bir değişkenin belirli bir değere kadar ne kadar olasılık biriktiğini söyleyen bir fonksiyondur.

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu: Tanım

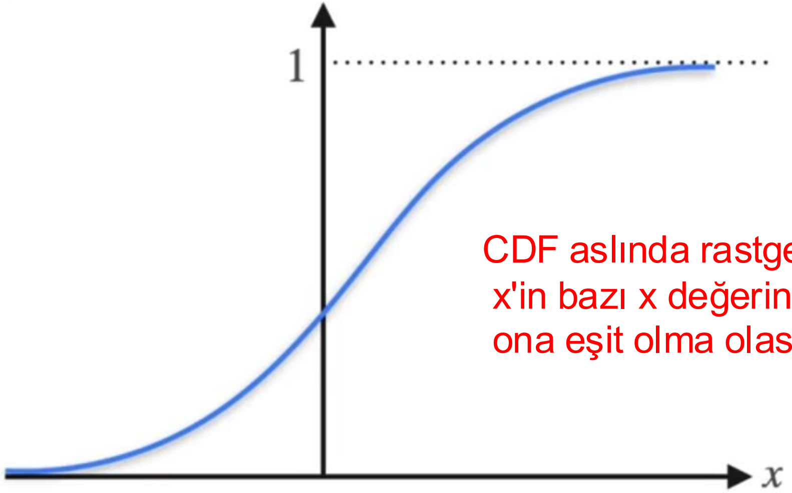
CDF, değişkenin belirli bir değere kadar birikmiş olasılığının ne kadar olduğunu gösterir.

Bu şu demek oluyor



$$\text{CDF}(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

Her gerçek sayı için tanımlanır



CDF aslında rastgele değişkeninizin x'in bazı x değerinden küçük veya ona eşit olma olasılığıdır

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu: Tanım

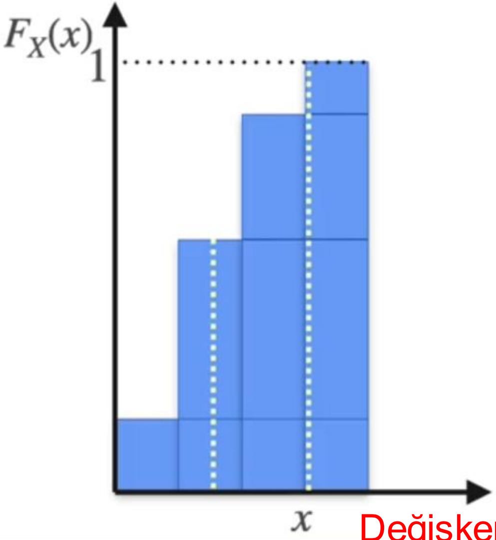
CDF, değişkenin belirli bir değere kadar birikmiş olasılığının ne kadar olduğunu gösterir.

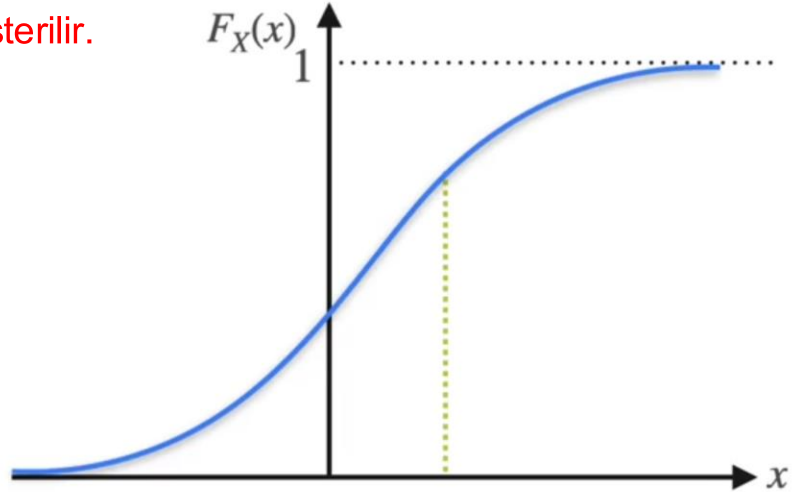
Bu şu demek oluyor

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

Her gerçek sayı için tanımlanır

büyük F ile gösterilir.



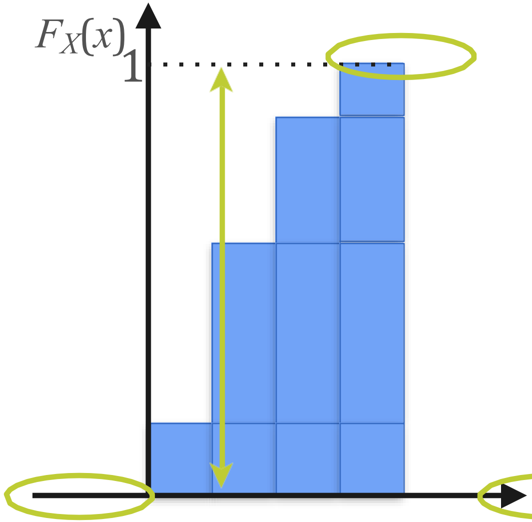


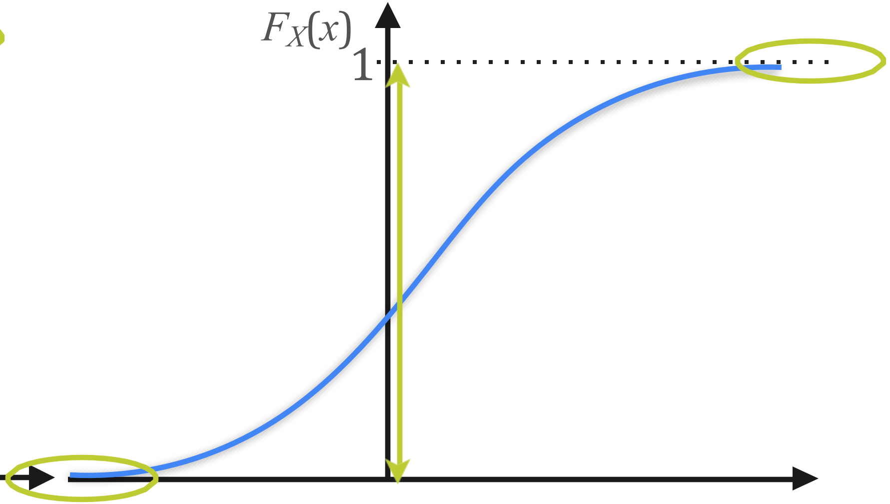
Değişkeniniz soldaki gibi ayrıksa ve CDF'de sıçramalar olacaktır.

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu: Tanım

CDF, değişkenin belirli bir değere kadar birikmiş olasılığının ne kadar olduğunu gösterir.

Bu şu demek oluyor $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ ← Her gerçek sayı için tanımlanır

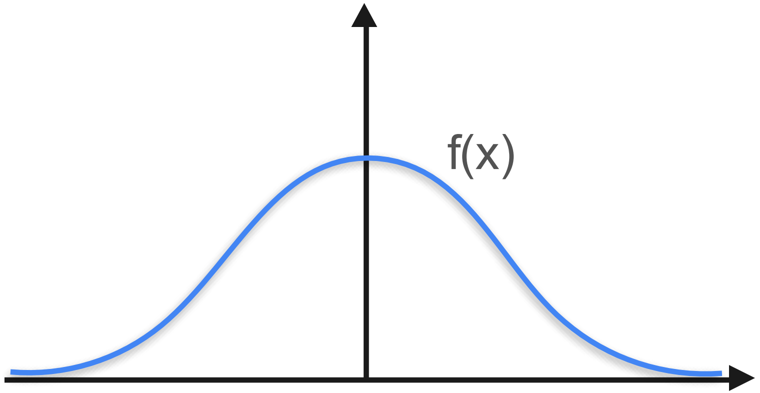




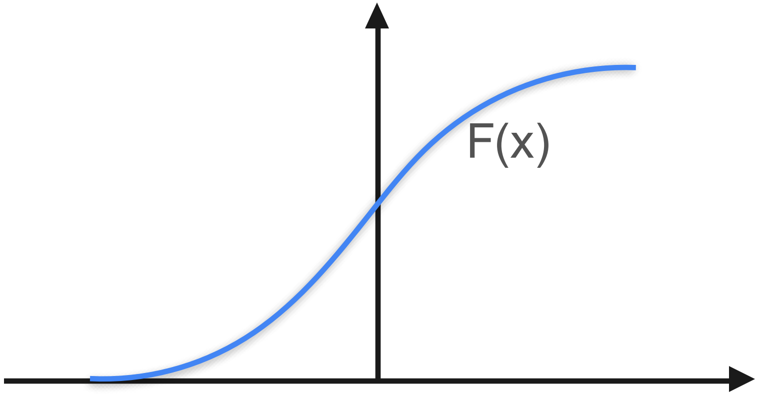
Özellikler

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- Sol "bitiş noktası" 0
- Sağ "bitiş noktası" 1
- **Asla azalmaz**

PDF ve CDF Özet



- alan = 1
- Her zaman pozitif



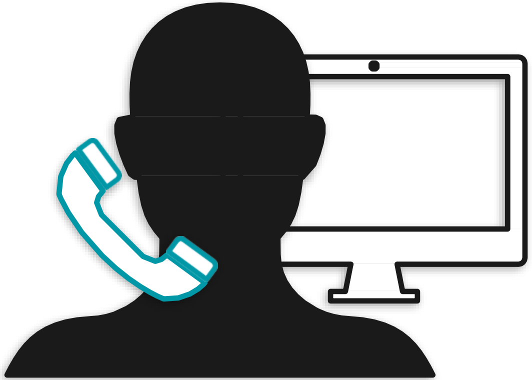
- Sol “bitiş noktası” 0
- Sağ “bitiş noktası” 1
- (uç noktalar sonsuzda olabilir)
- Her zaman pozitif ve artan

DeepLearning.AI

Olasılık Dağılımları

Düzgün Dağılım

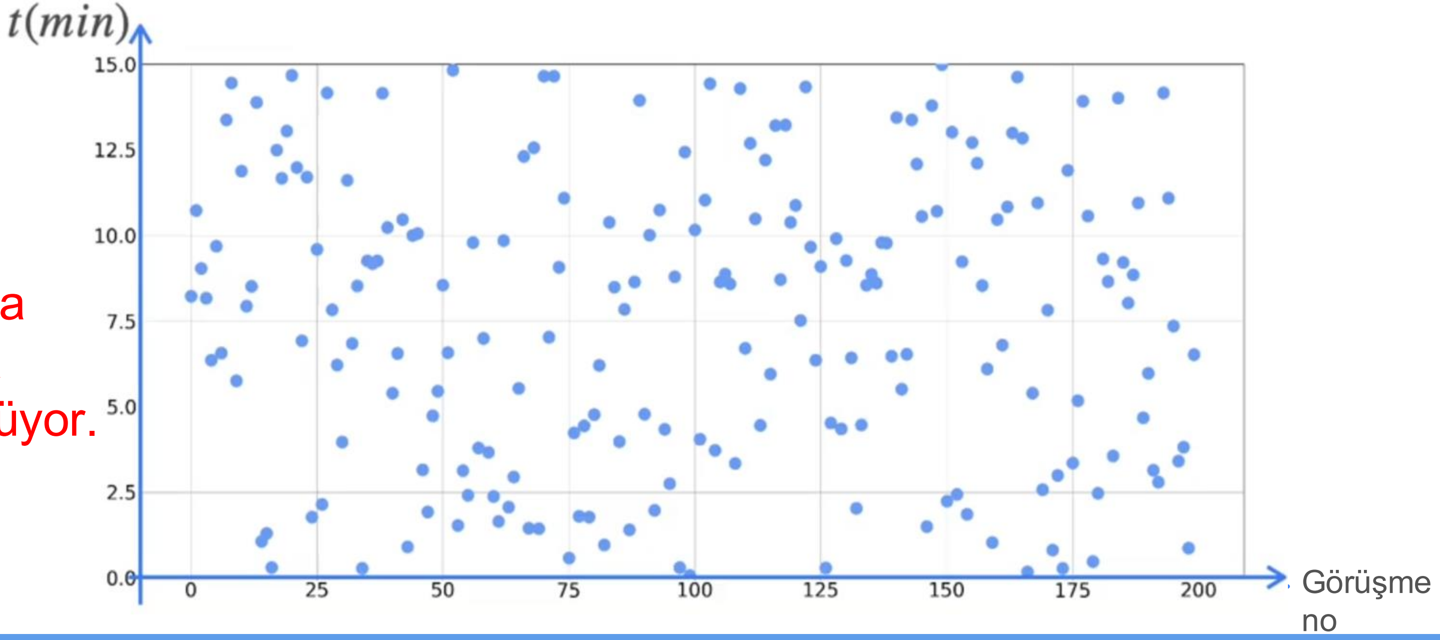
Düzgün Dağılım: Motivasyon



Teknik destek hattını arıyorsunuz.
Sıfır ile 15 dakika arasında istedikleri zaman cevap verebilirler ve bu süre içerisinde cevap vermezlerse hat kesilir.

Düzgün Dağılım: Motivasyon

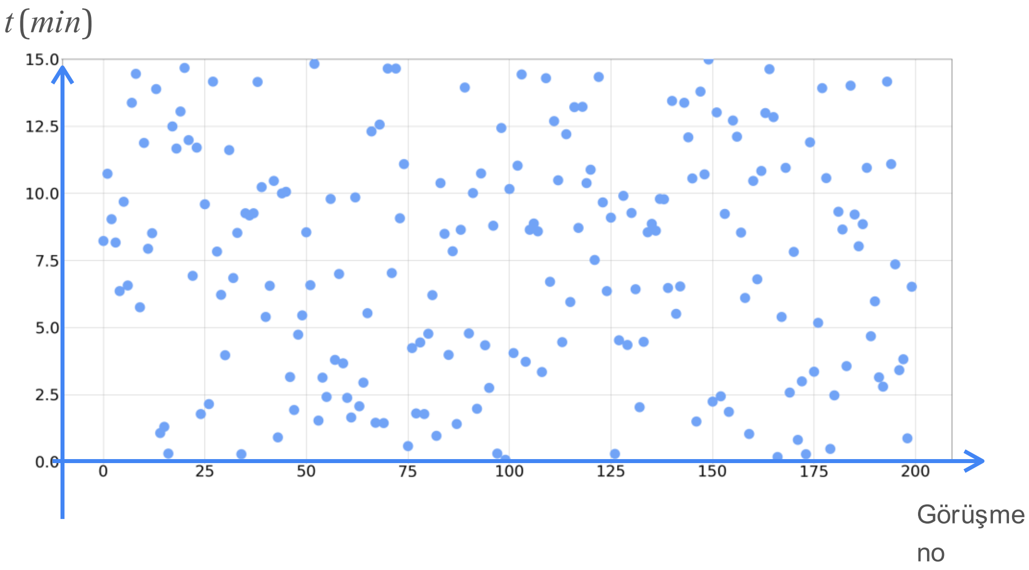
Onları son 200 kez aradığınızda, yanıt vermelerinin ne kadar sürdüğünü not aldınız

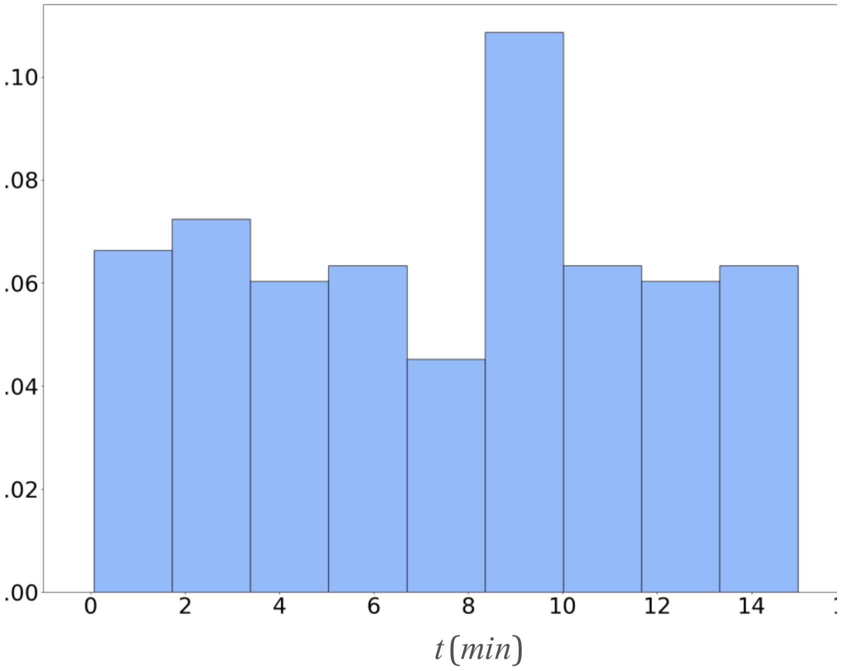


Noktalar 0-15 dakika boyunca eşit olarak dağılmış gibi görünüyor.

Düzgün Dağılım: Motivasyon

Bunun ölçümlere dayandığını unutmayalım, bu nedenle bir miktar sapma bekleniyor.





Düzgün Dağılım: Motivasyon

Yoğunluk eğrisinin altındaki alanın 1 olması gerektiğini unutmayın

T: beklemeniz gereken süre (dakika cinsinden)

0 ile 15 dakika arasındaki herhangi bir değerin aynı oluşma sıklığına sahip olması gerekir.

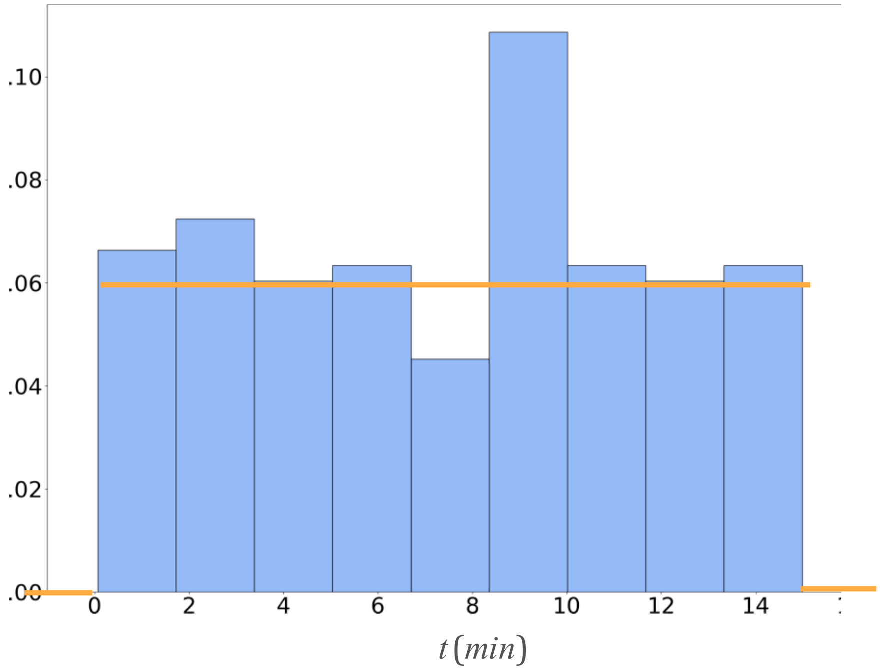
↓

PDF, (0,15) aralığındaki tüm değerler için sabit olmalıdır

↓

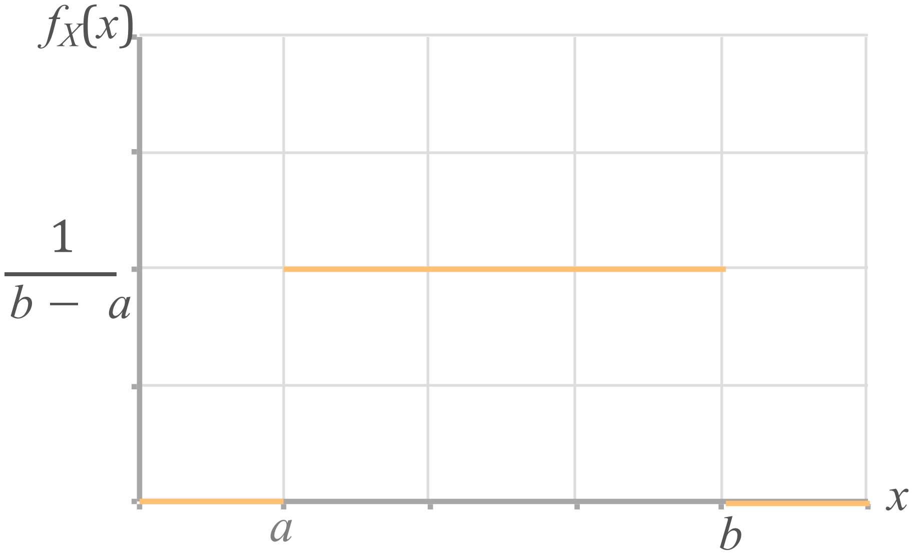
Hangi sabit? → $15 \times h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{15}$

$= 0.06$



Düzgün Dağılım: Model

Tüm olası değerlerin bir aralıkta yer alması ve aynı oluşum sıklığına sahip olması durumunda, sürekli bir rastgele değişken düzgün bir dağılımla modellenebilir.



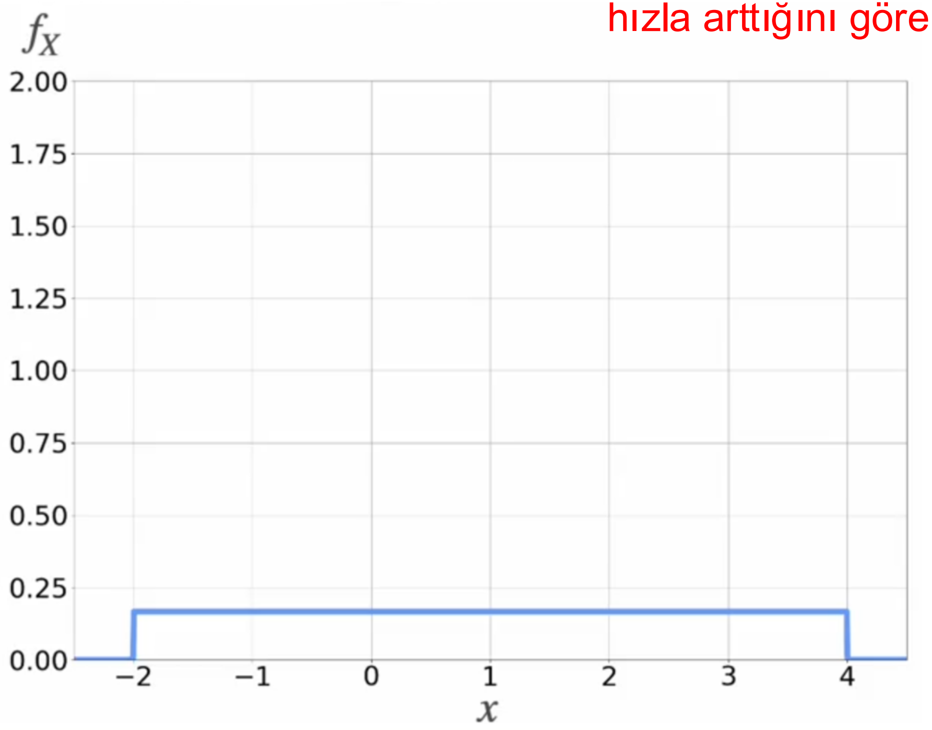
Parametere:

- a : başlangıç aralığı
- b : bitiş aralığı

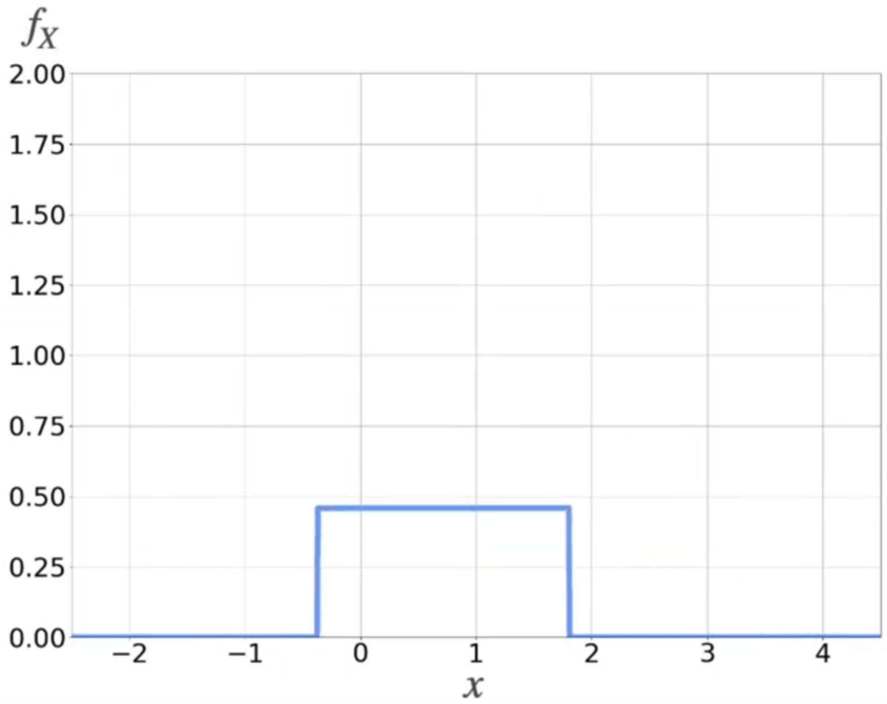
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$$

Düzgün Dağılım: PDF

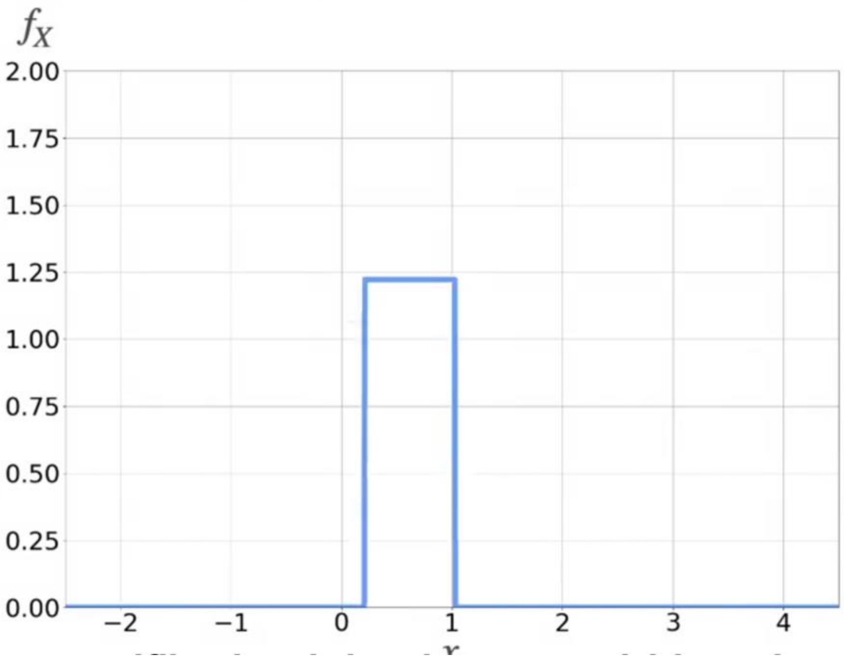
a, b aralığı PDF'den daha büyük olduğunda, PDF'nin yüksekliğinin daha küçük olduğunu ve aralık kısaldıkça hızla arttığını görebilirsiniz.



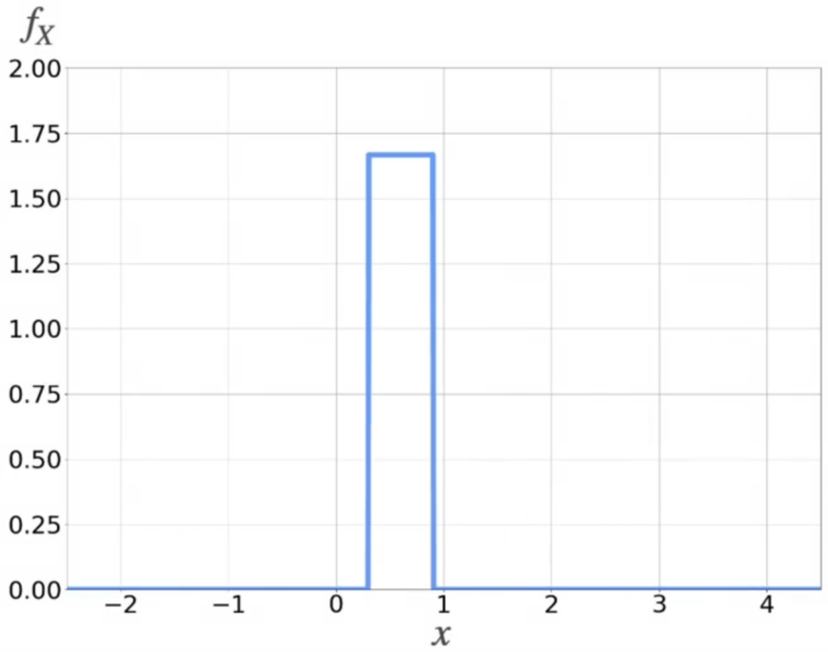
Düzgün Dağılım: PDF



Düzgün Dağılım: PDF

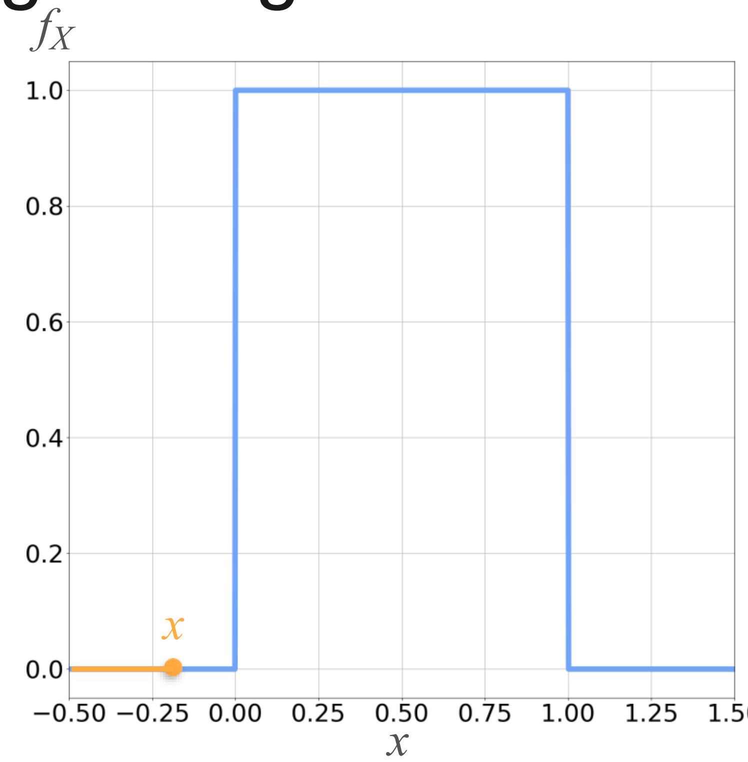


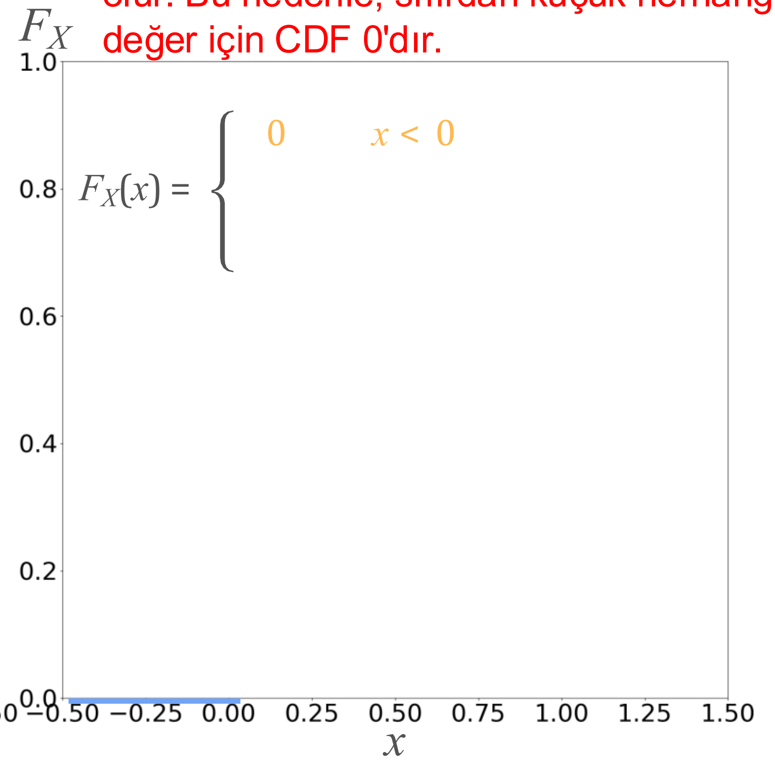
Düzgün Dağılım: PDF



Düzgün Dağılım: CDF

İlk önce 0'dan küçük bir x'i düşünerek başlayalım. Bu durumda, PDF'nin altındaki alan soldan o noktaya kadar x noktasına kadar 0 olur. Bu nedenle, sıfırdan küçük herhangi bir değer için CDF 0'dır.

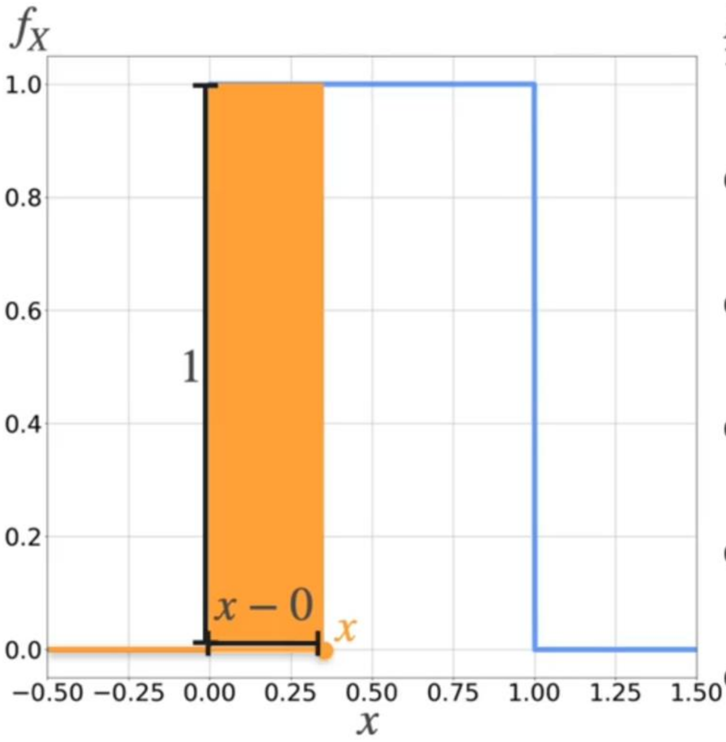


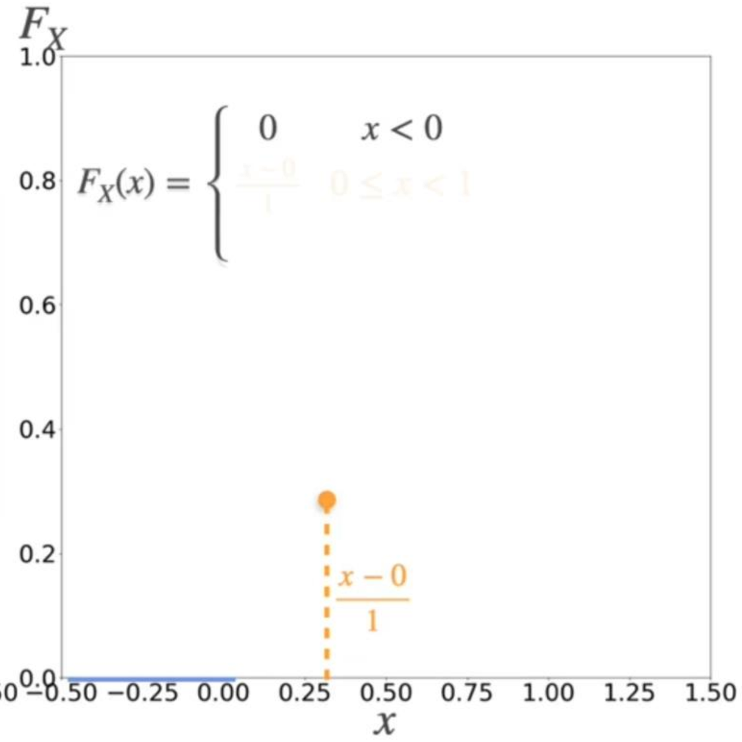


$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ & \end{cases}$$

Düzgün Dağılım: CDF

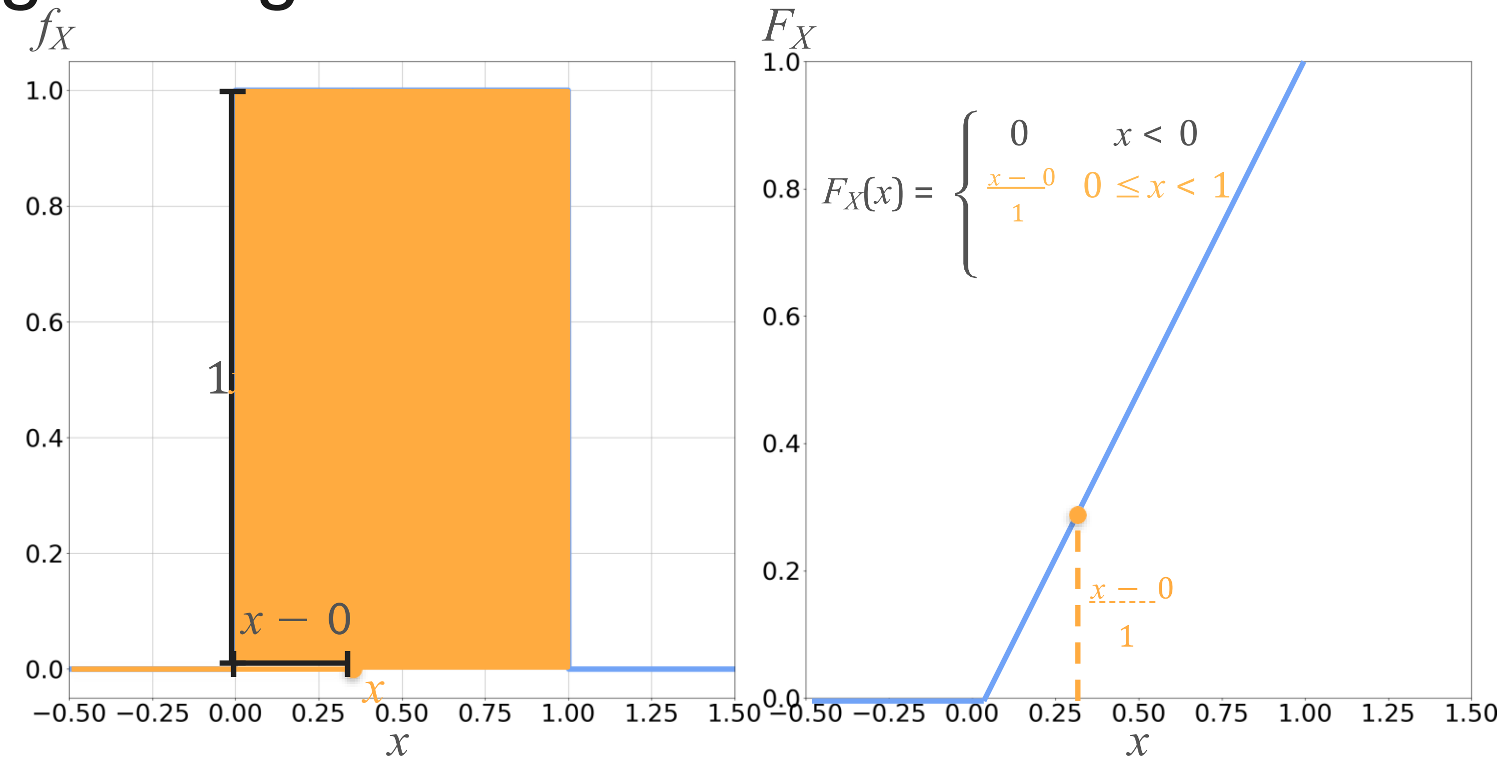
Şimdi, 0 ile 1 arasındaki herhangi bir x'i alın. Değişkenin belirli bir x'den daha küçük olma olasılığı buradaki alandır.





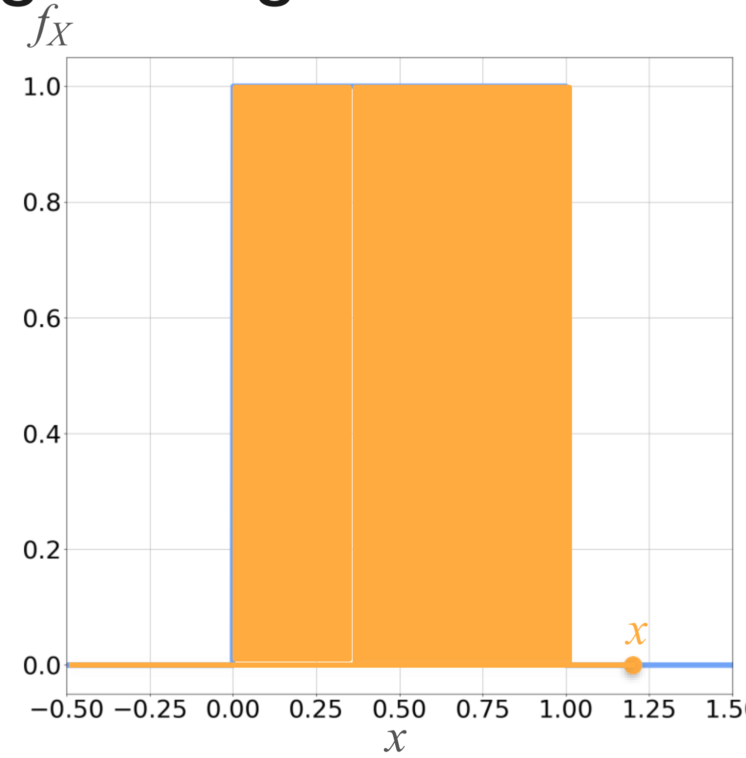
Düzgün Dağılım: CDF

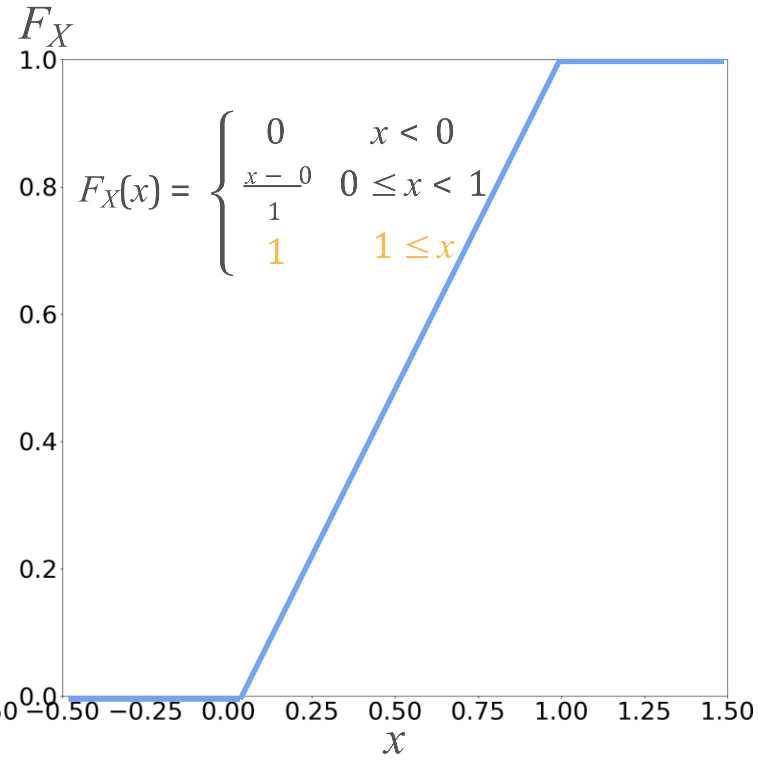
CDF, eğimi 1 olan bu çizgidir.



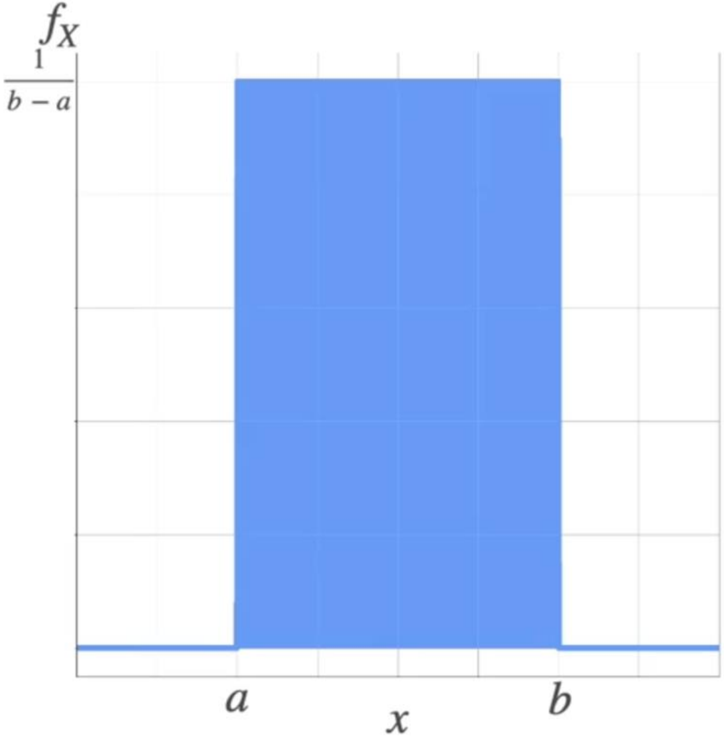
Düzgün Dağılım: CDF

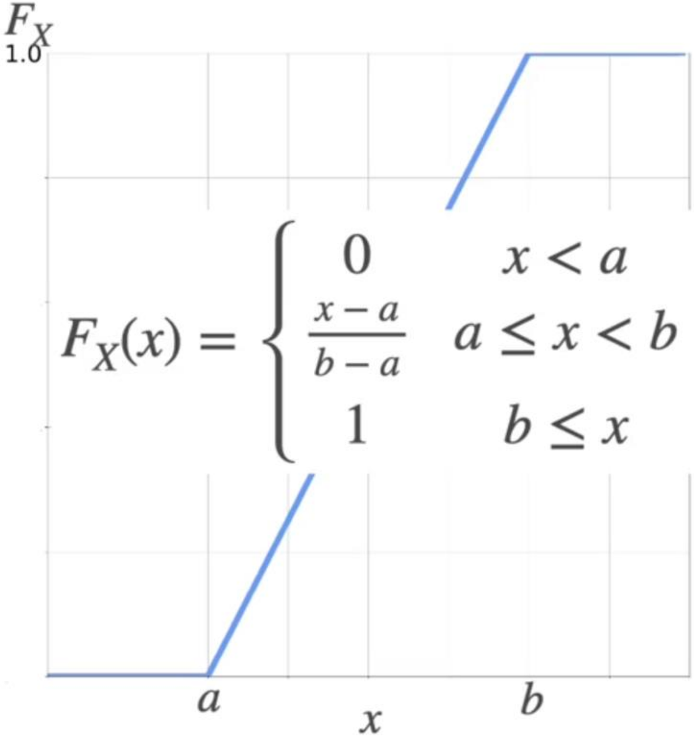
Son olarak, 1'den büyük herhangi bir x alırsanız, PDF'nin altındaki tüm alanı zaten toplamışsınızdır, bu nedenle olasılık 1 olarak kalır.





Düzgün Dağılım: CDF





$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

DeepLearning.AI

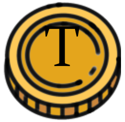
Olasılık Dağılımları

Normal Dağılım

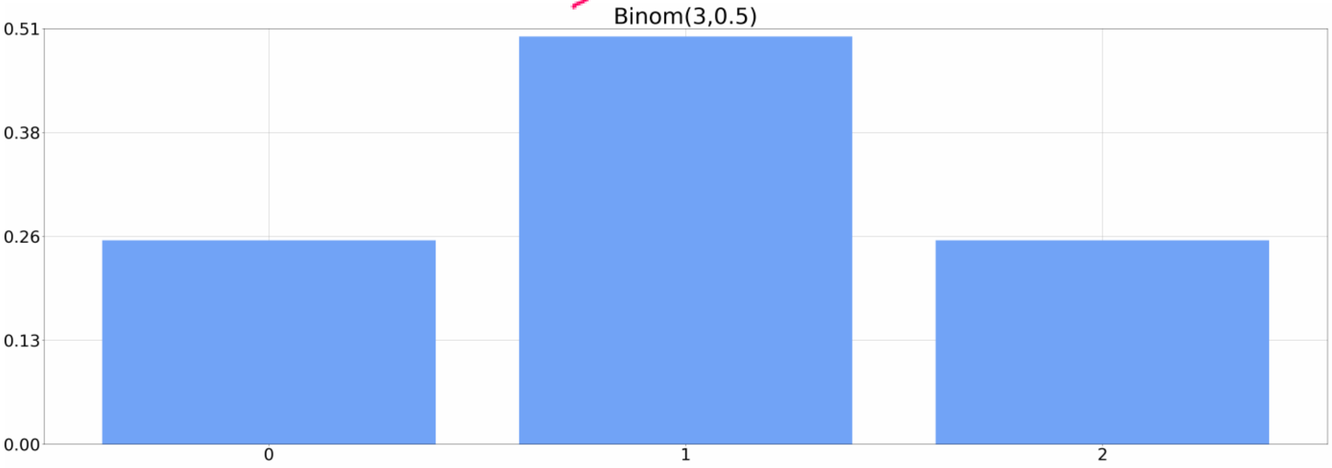
$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$X \sim \text{Binom}(2, 0.5)$

Çok Büyük Binom Dağılımı



$\binom{2}{1}(0{,}5)^1 \cdot (1-0{,}5)^{2-1}$

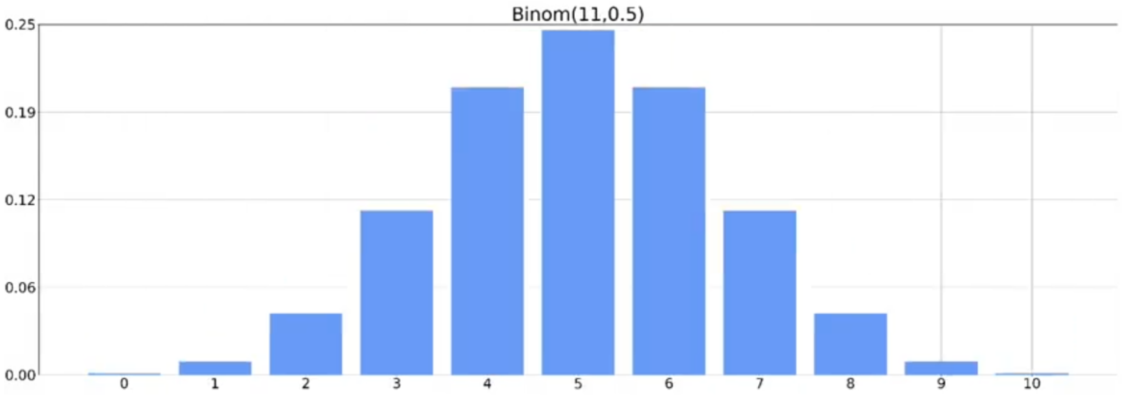


Atış sayısı = 2

madeni paranın 2 kez atışındaki kafa sayısını ve olasılık kütle fonksiyonunu sayan binom dağılımı

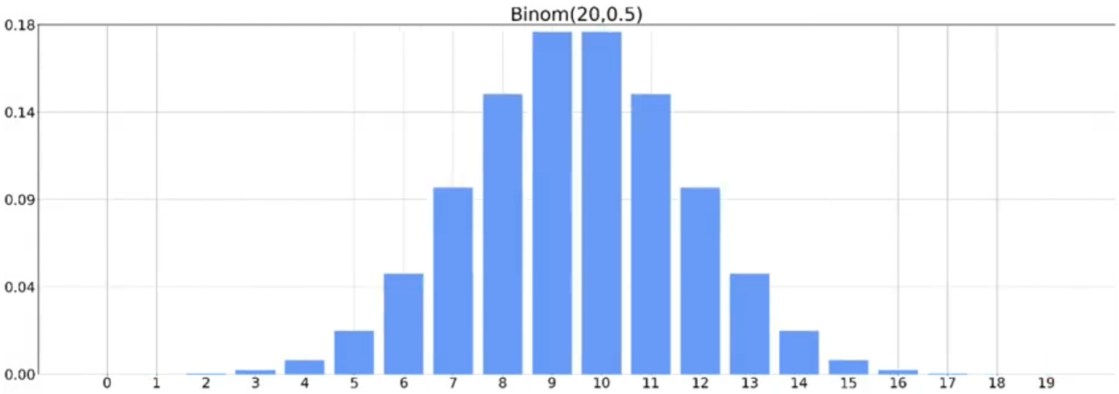
Çok Büyük Binom Dağılımı

Olasılık Kütle Fonksiyonu (PMF)



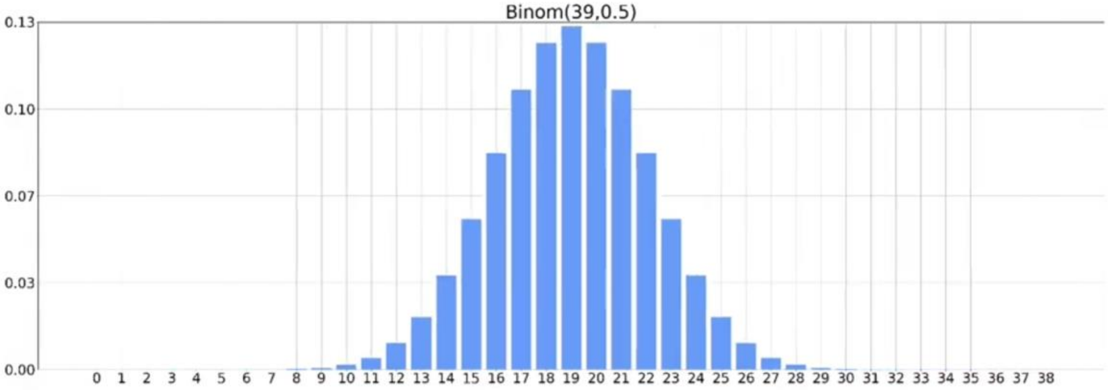
Atış sayısı = n

Çok Büyük Binom Dağılımı



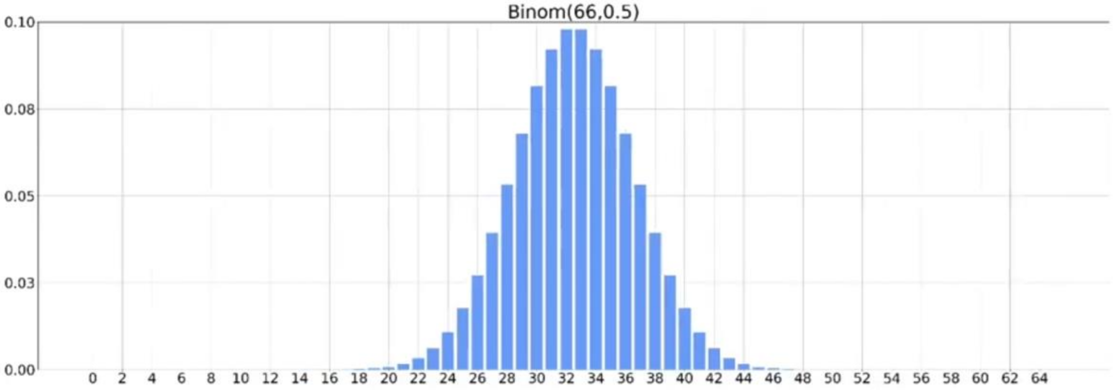
Atış sayısı = n

Çok Büyük Binom Dağılımı



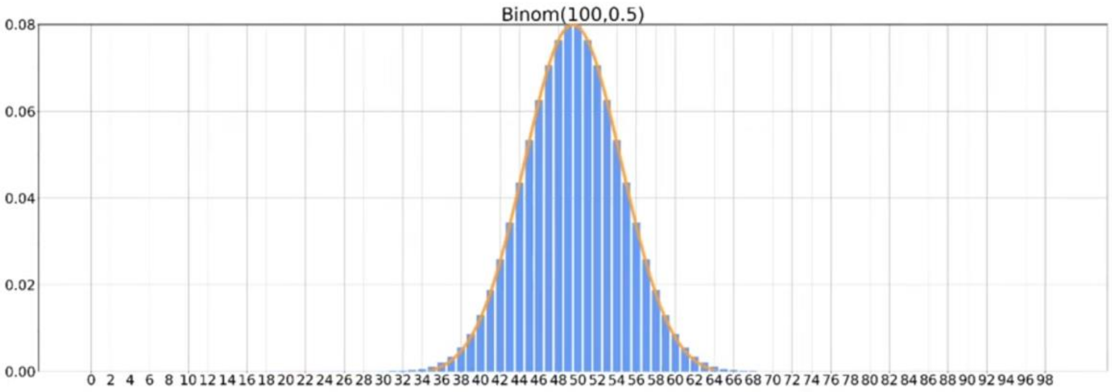
Atış sayısı = n

Çok Büyük Binom Dağılımı



Atış sayısı = n

Çok Büyük Binom Dağılımı

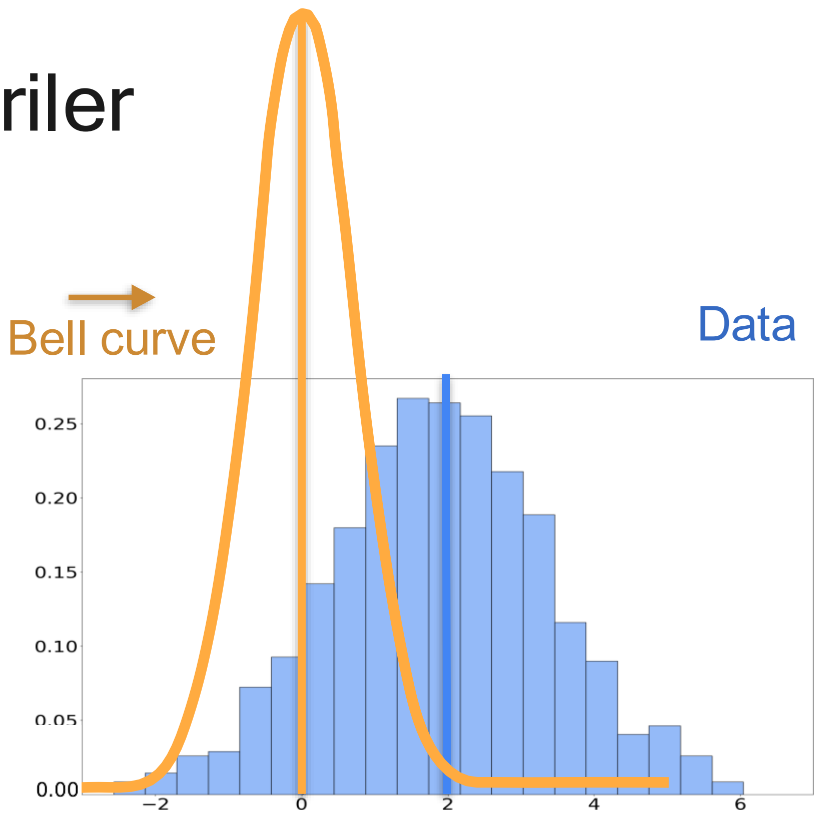


Atış sayısı = n

n çok büyük olduğunda, binom dağılımının bir Gauss dağılımı ile oldukça iyi tahmin edilebileceği anlamına gelir

Çan Şekilli Veriler

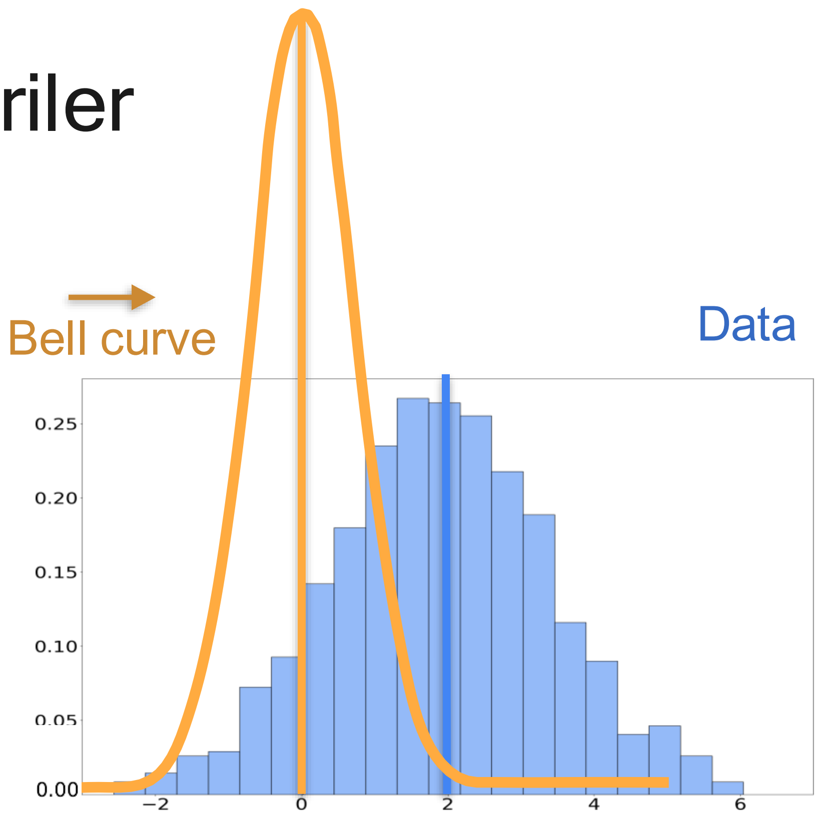
$$e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$\mu = 0 \quad \mu = 2$

Çan Şekilli Veriler

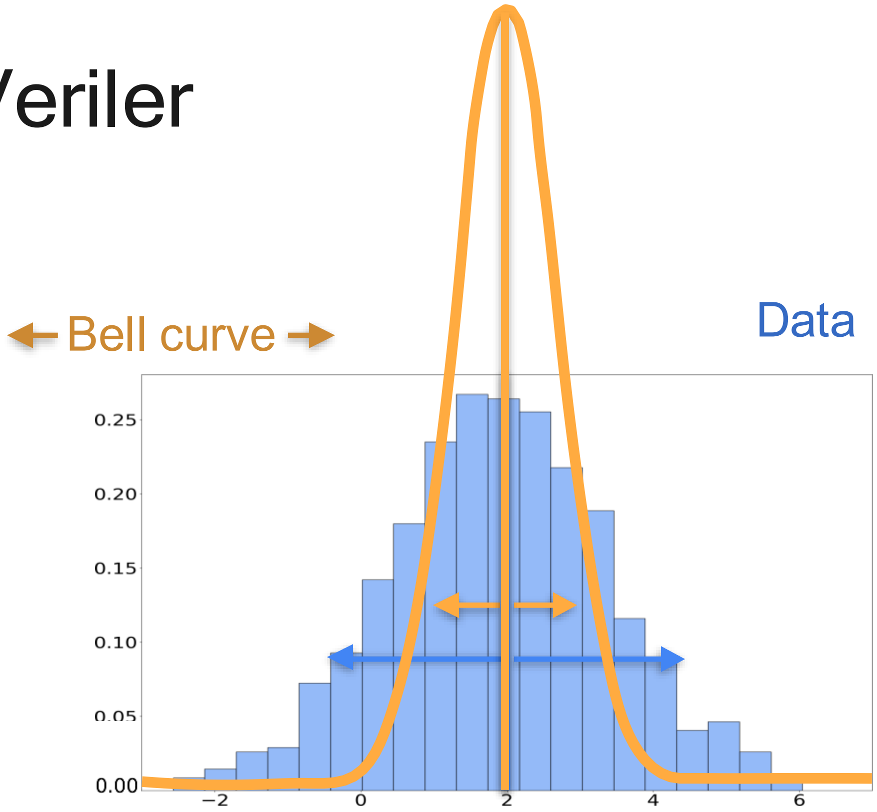
$$e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$$



$\mu = 0$ $\mu = 2$

Çan Şekilli Veriler

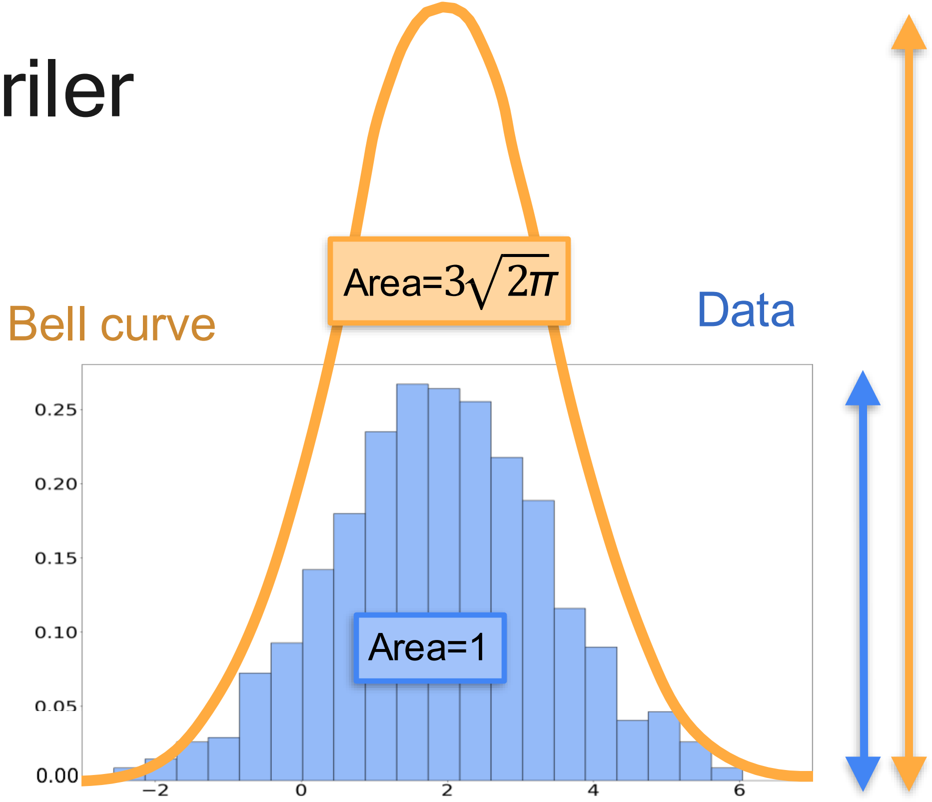
$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}$$



$\sigma = 1$ $\sigma = 3$

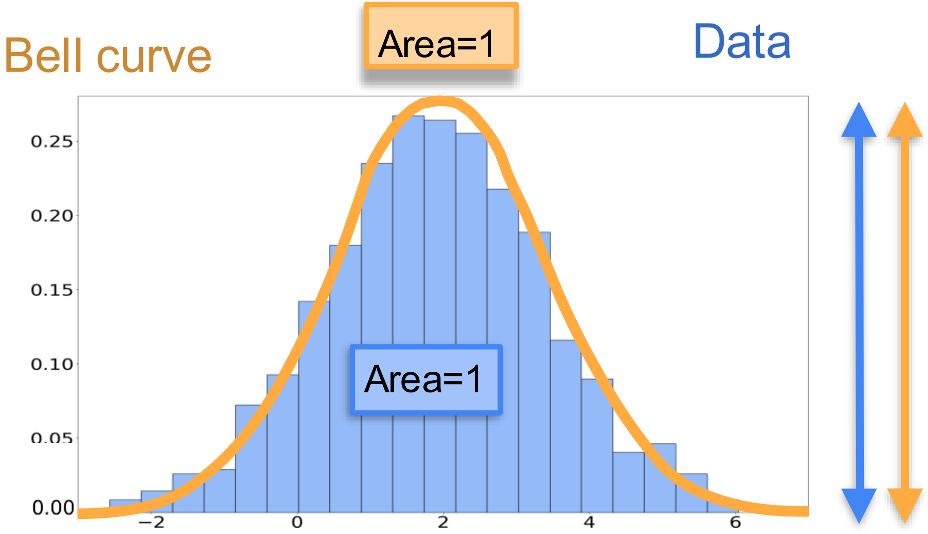
Çan Şekilli Veriler

$$\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}$$



Çan Şekilli Veriler

$$\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}$$

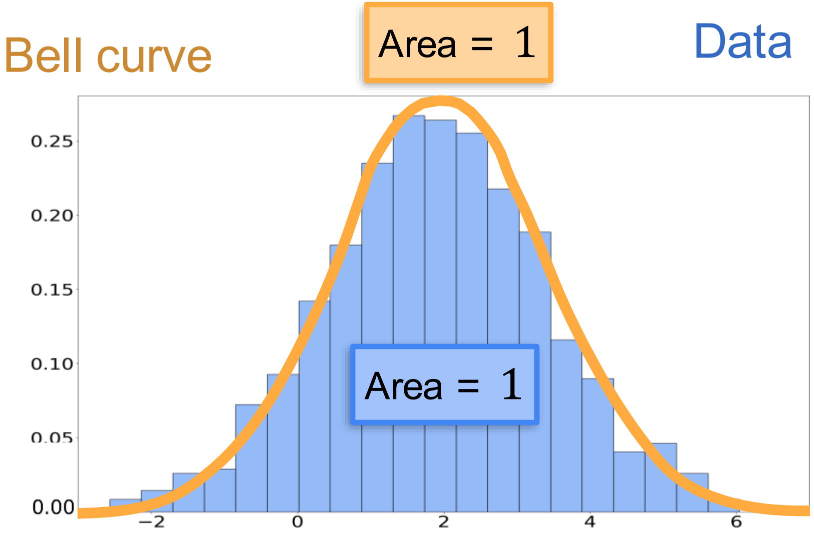


Çan Şekilli Veriler

Mean = μ

Standard deviation = σ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

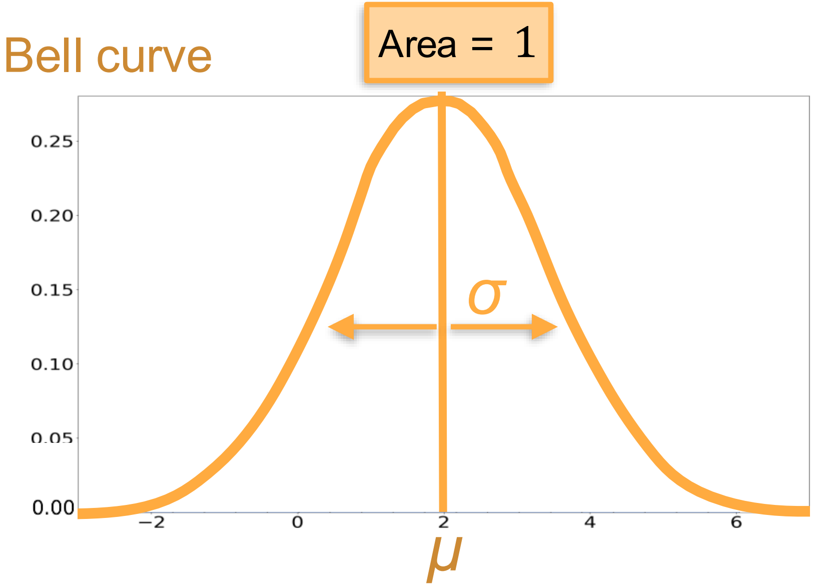


Normal Dağılım

Mean = μ

Standard deviation = σ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



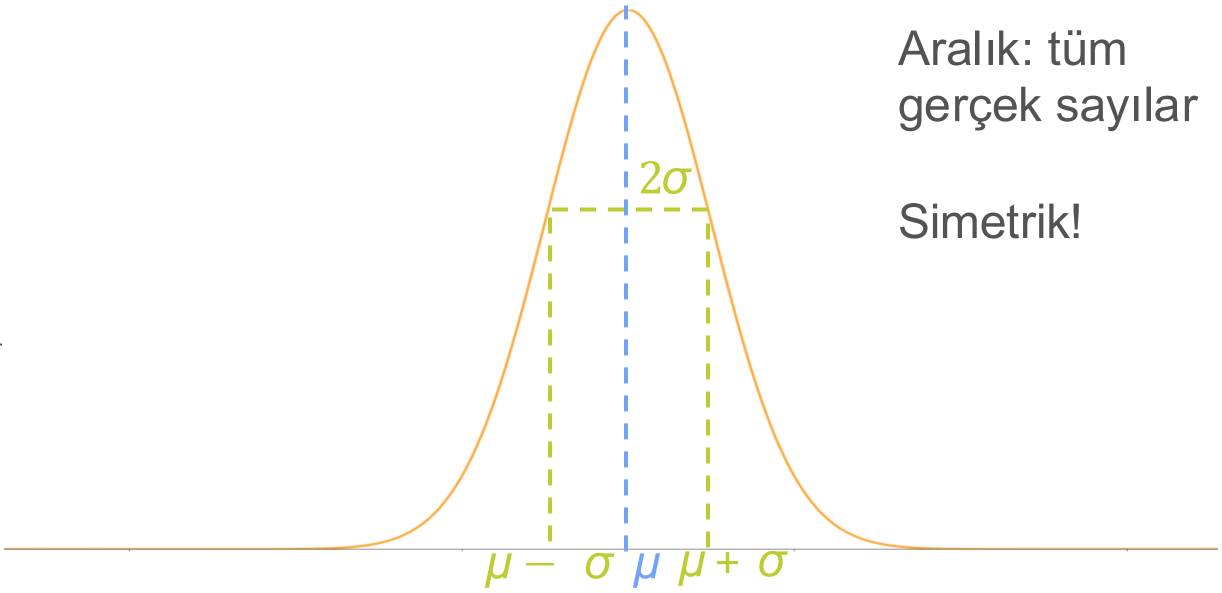
Normal Dağılım

Parametere:

- μ: çanın merkezi
- σ: çanın yayılımı

$$f_X(x) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

ölçekleme sabiti



Aralık: tüm gerçek sayılar

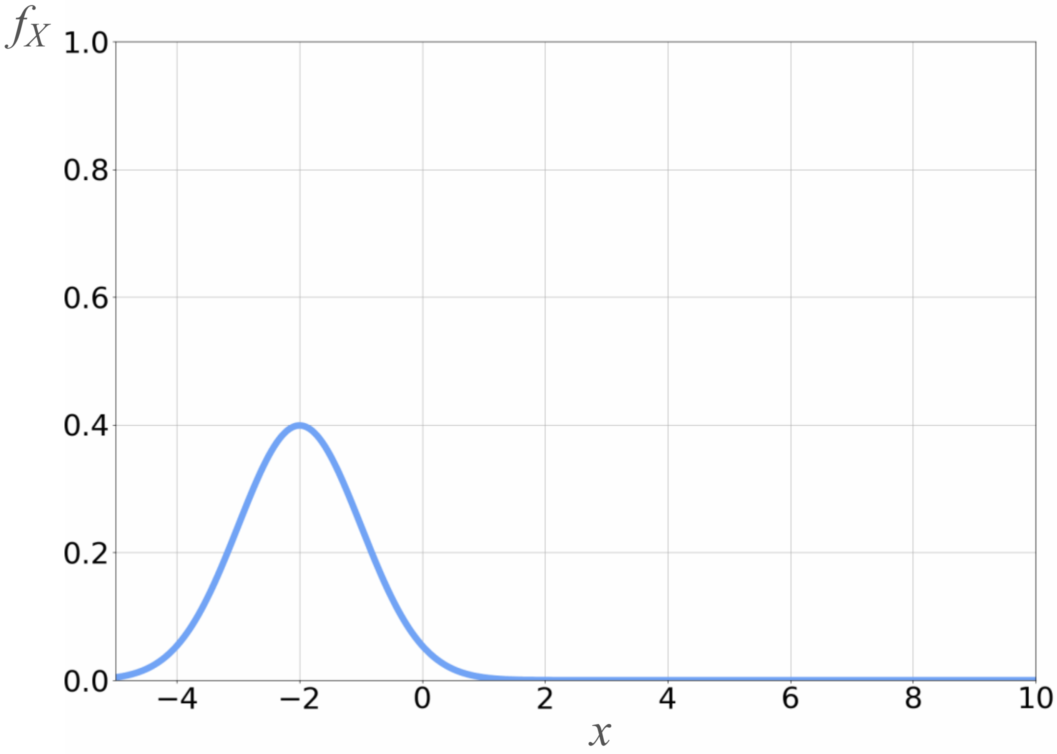
Simetrik!

Normal Dağılım

Parametere:

- μ: çanın merkezi
- σ: çanın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma 2}}$$

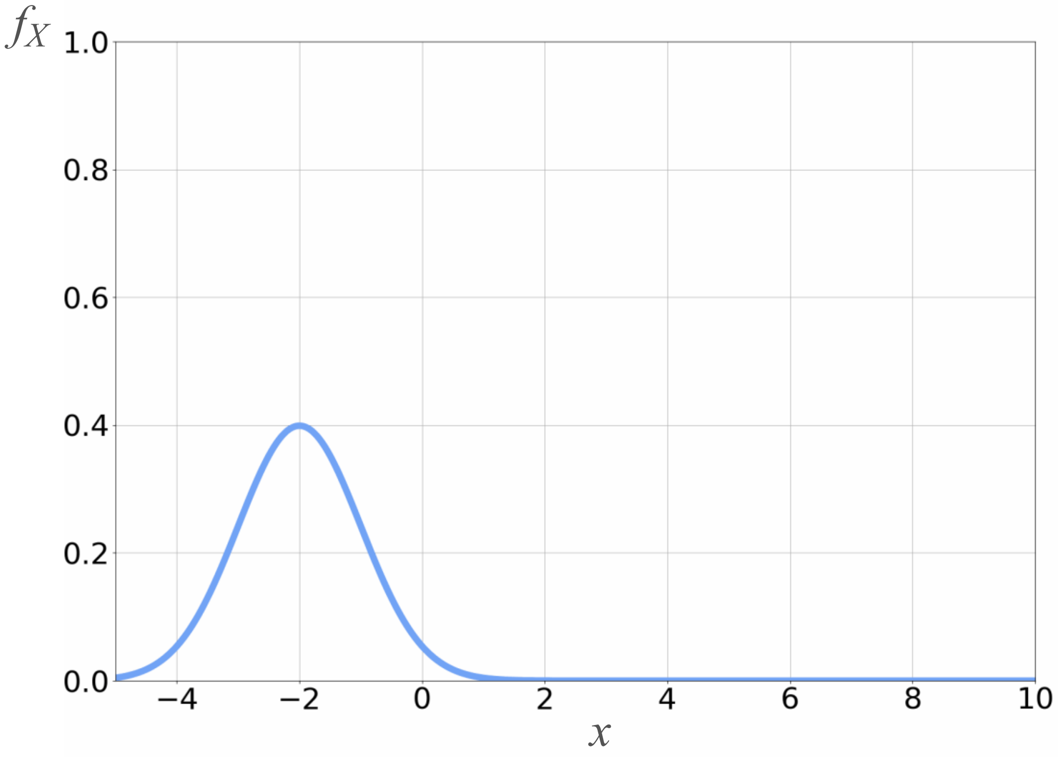


Normal Dağılım

Parametere:

- μ: çanın merkezi
- σ: çanın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma 2}}$$

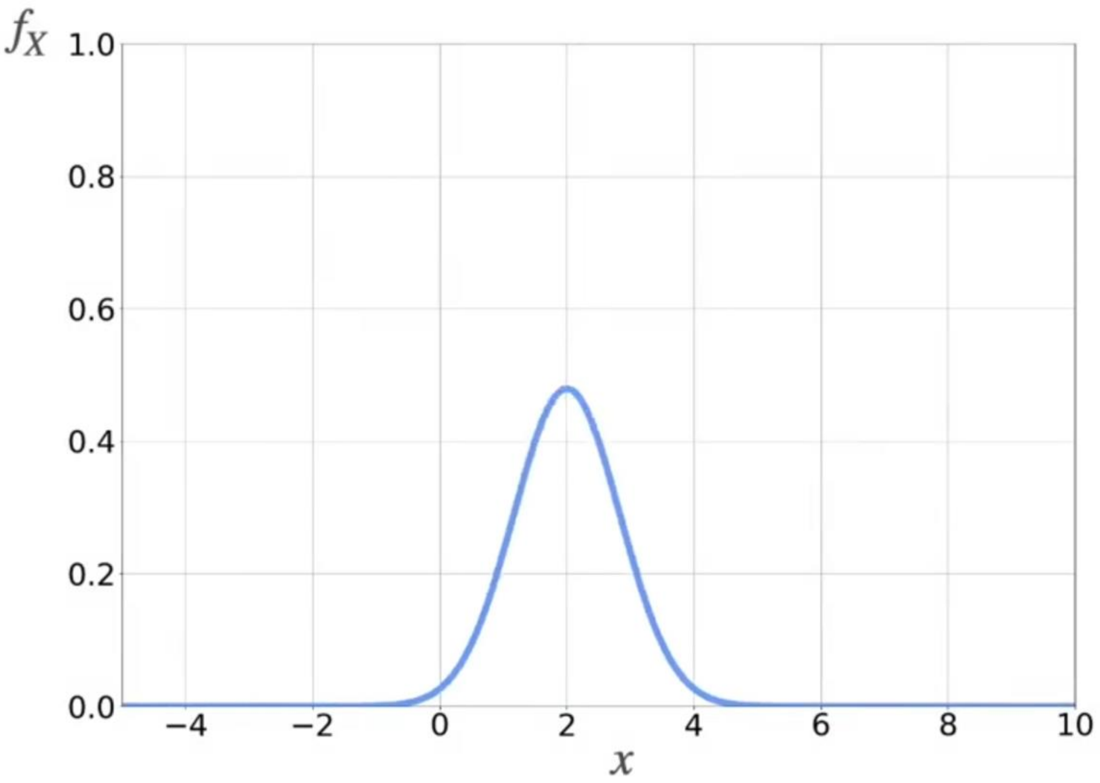


Normal Dağılım

Parametere:

- μ: çanın merkezi
- σ: çanın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma 2}}$$

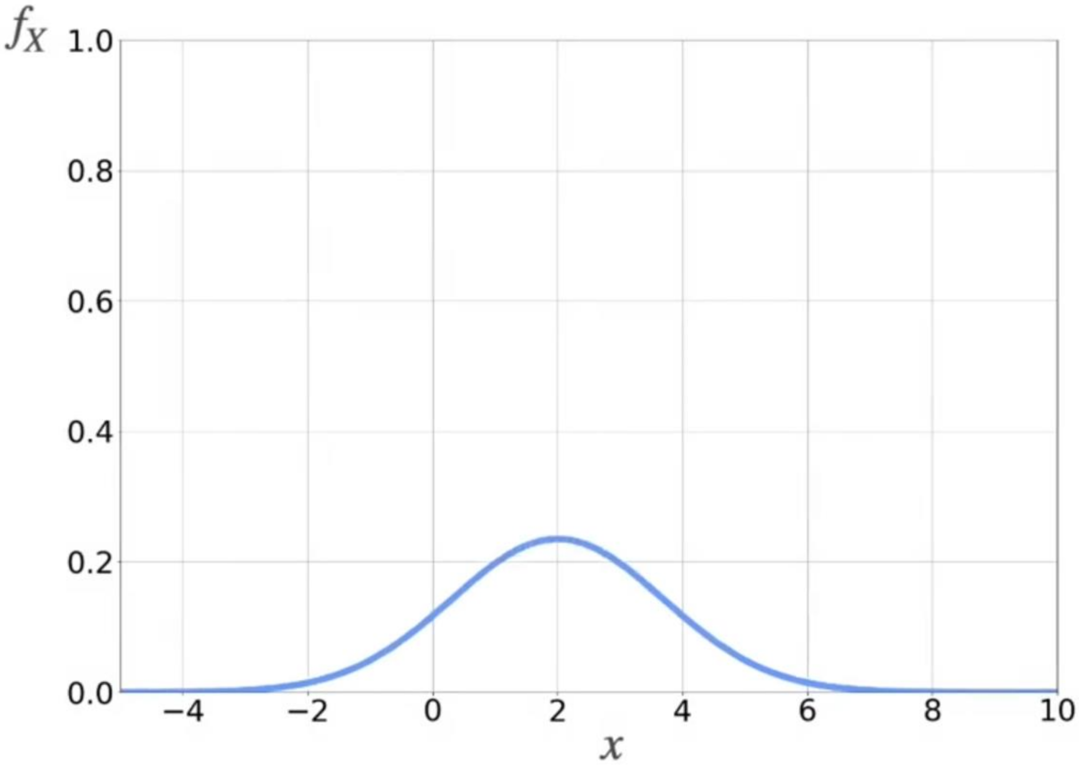


Normal Dağılım

Parametere:

- μ: çanın merkezi
- σ: çanın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



DeepLearning.AI

Normal Dağılım - Gösterim

Parametere:

- μ: çanın merkezi
- σ: çanın yayılımı

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \boxed{\sigma^2})$$

buna varyans denir

Standart Normal Dağılım

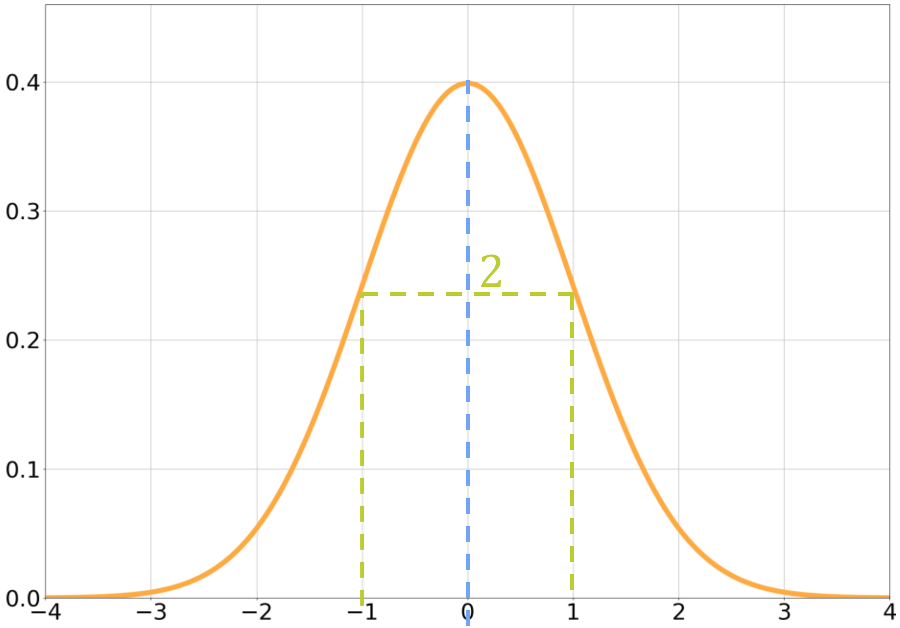
Parameters:

- μ: 0
- σ: 1

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 1}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-0)^2}{1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



Standardizasyon

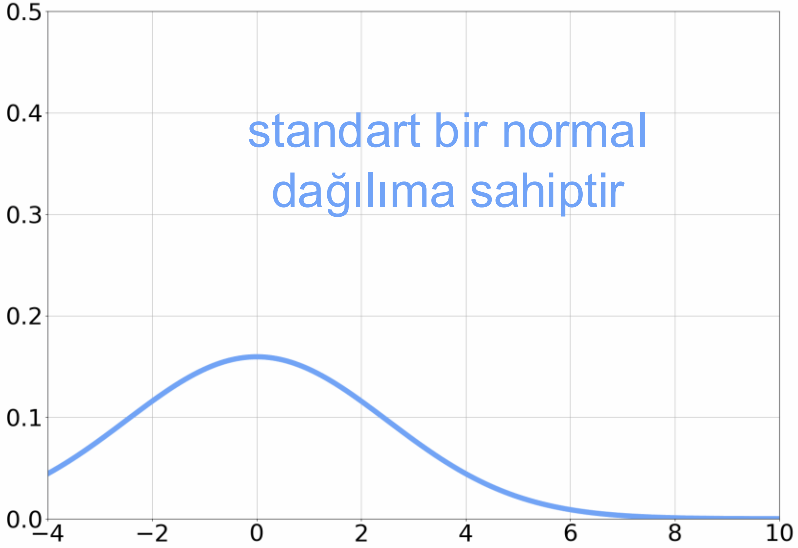
Herhangi bir normal dağılımı standart olana dönüştürmenin gerçekten kolay bir yolu var!

X, normal olarak dağıtılır ile:

$$\mu = 2, \sigma = 2.5$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Farklı büyüklükteki değişkenleri karşılaştırmak için standardizasyon çok önemlidir!



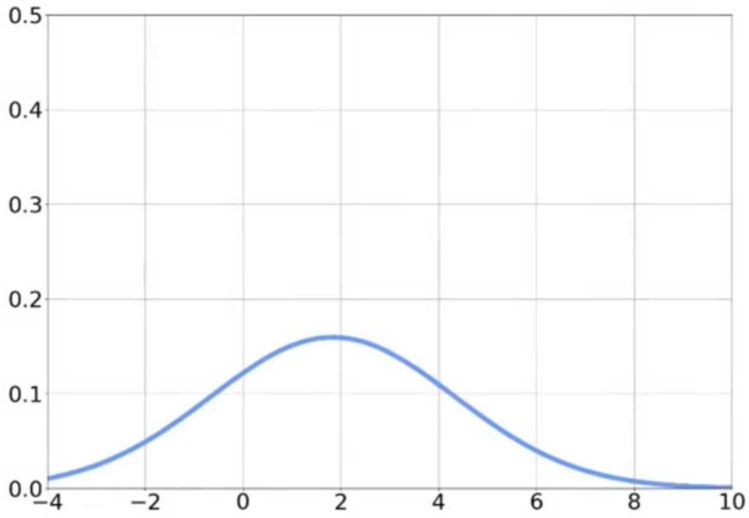
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$$\mu = 2, \sigma = 2.5$$

$$X - 2$$



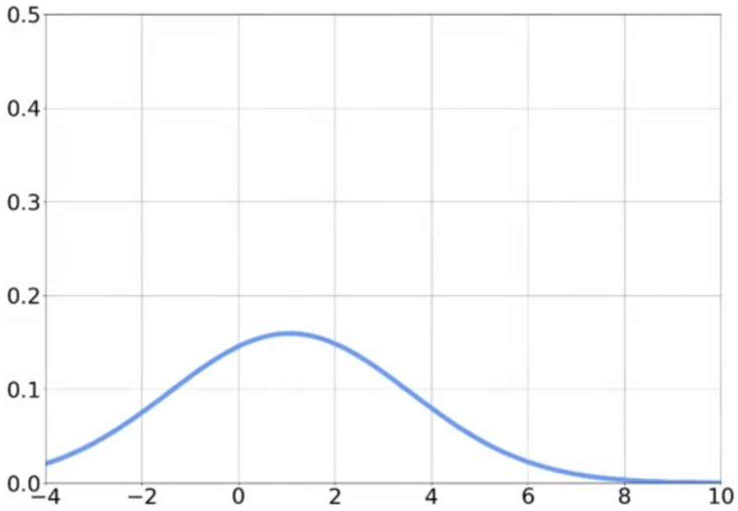
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$$\mu = 2,\ \sigma = 2.5$$

$$X - 2$$



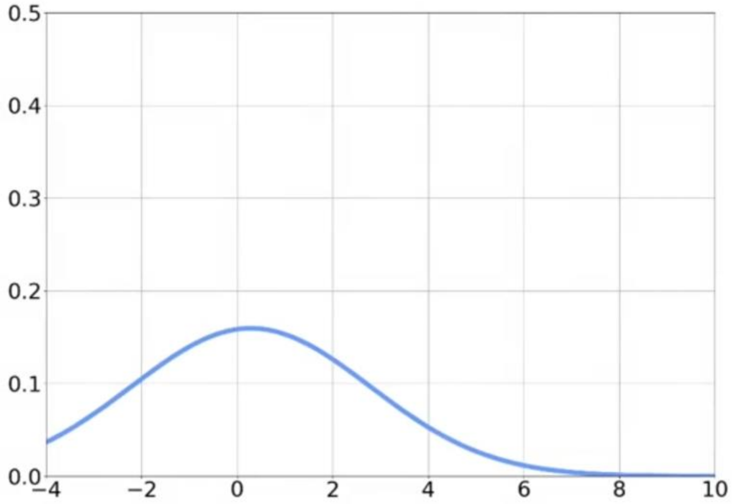
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$$\mu = 2, \; \sigma = 2.5$$

$$X - 2$$



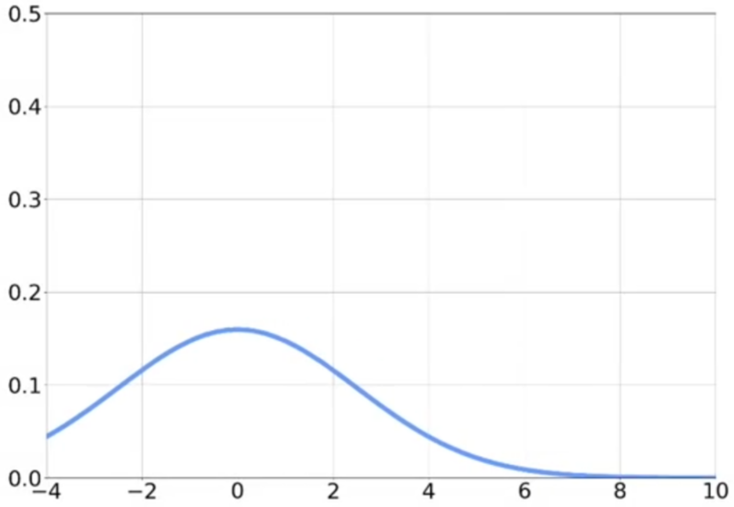
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$\mu = 2, \sigma = 2.5$

$$\frac{X-2}{2.5}$$



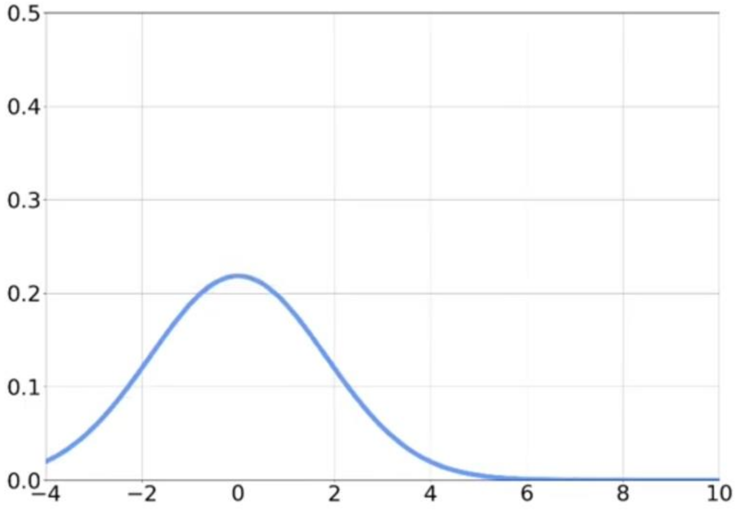
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$$\mu = 2, \sigma = 2.5$$

$$\frac{X - 2}{2.5}$$



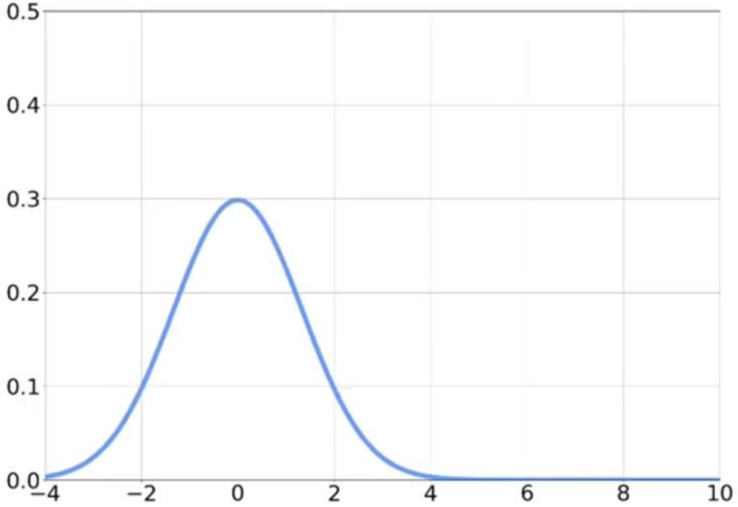
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$$\mu = 2,\ \sigma = 2.5$$

$$\frac{X - 2}{2.5}$$

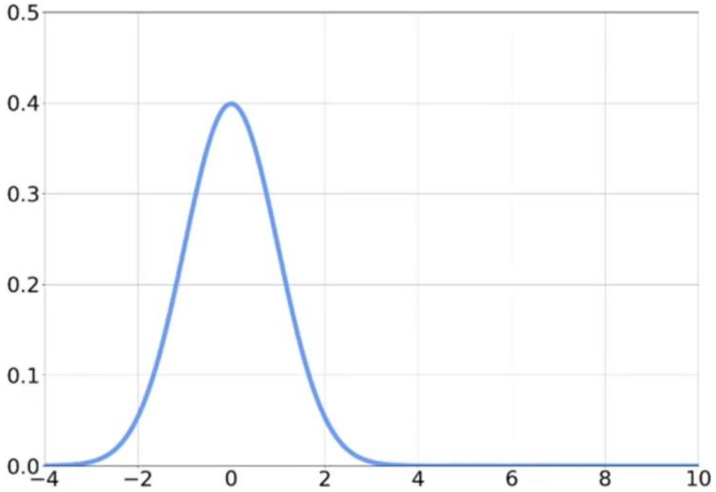


Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with
$\mu = 2,\ \sigma = 2.5$

$$\frac{X-2}{2.5}$$



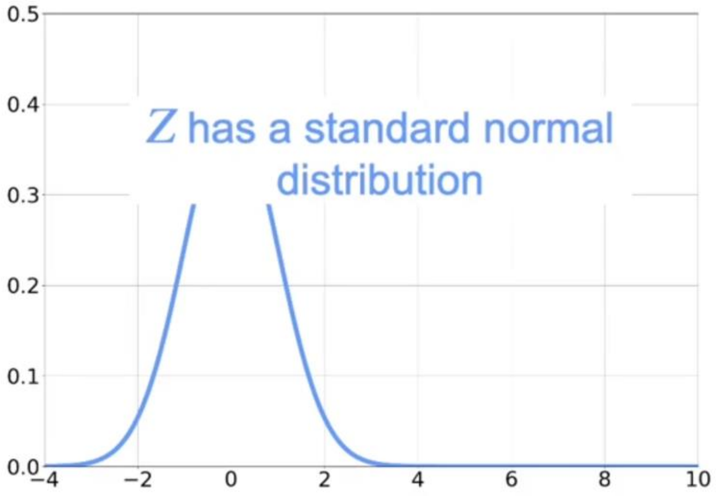
Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

X distributes normally with

$$\mu = 2, \sigma = 2.5$$

$$Z = \frac{X - 2}{2.5}$$



Standardizasyon

There's a really easy way to convert any normal distribution to the standard one!

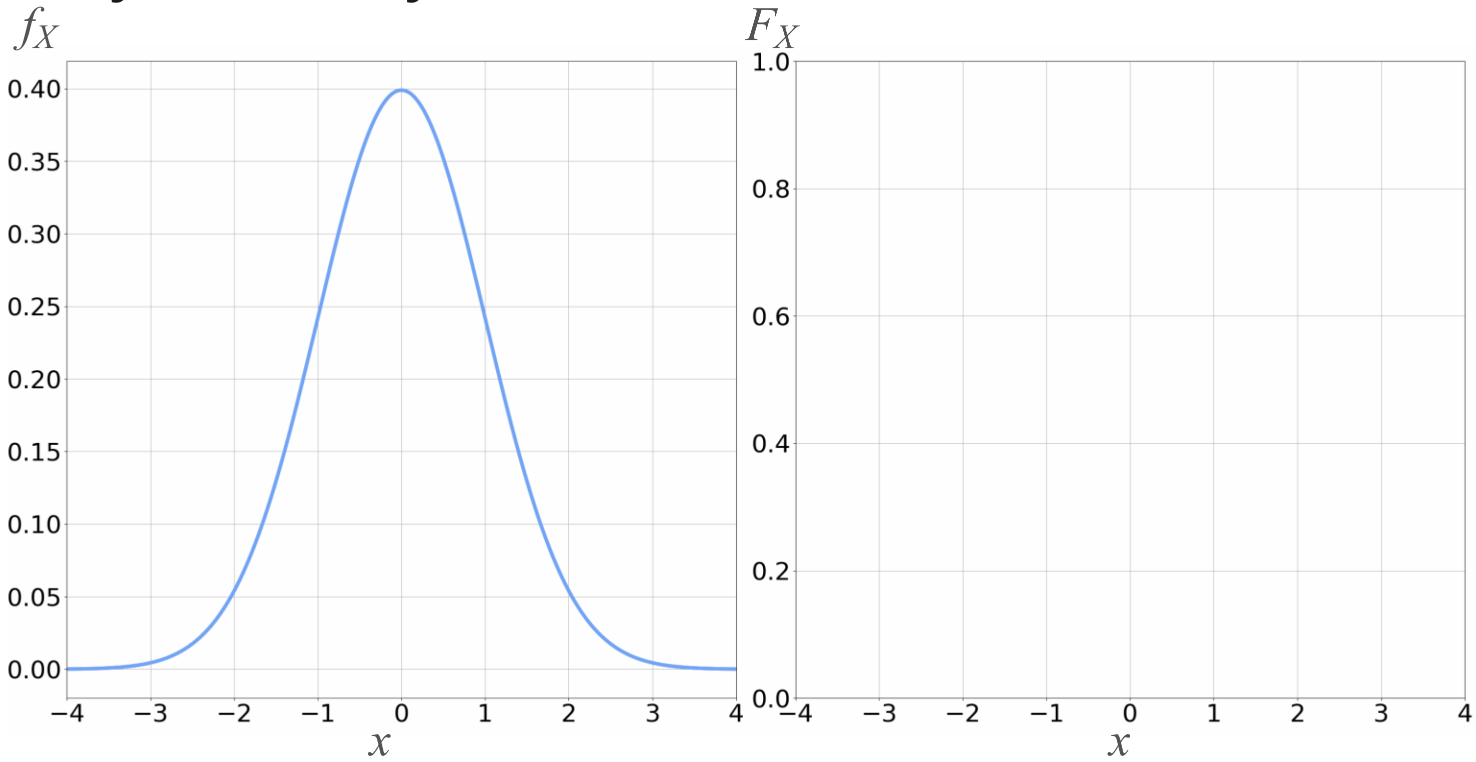
X distributes normally with

$$\mu = 2,\ \sigma = 2.5$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

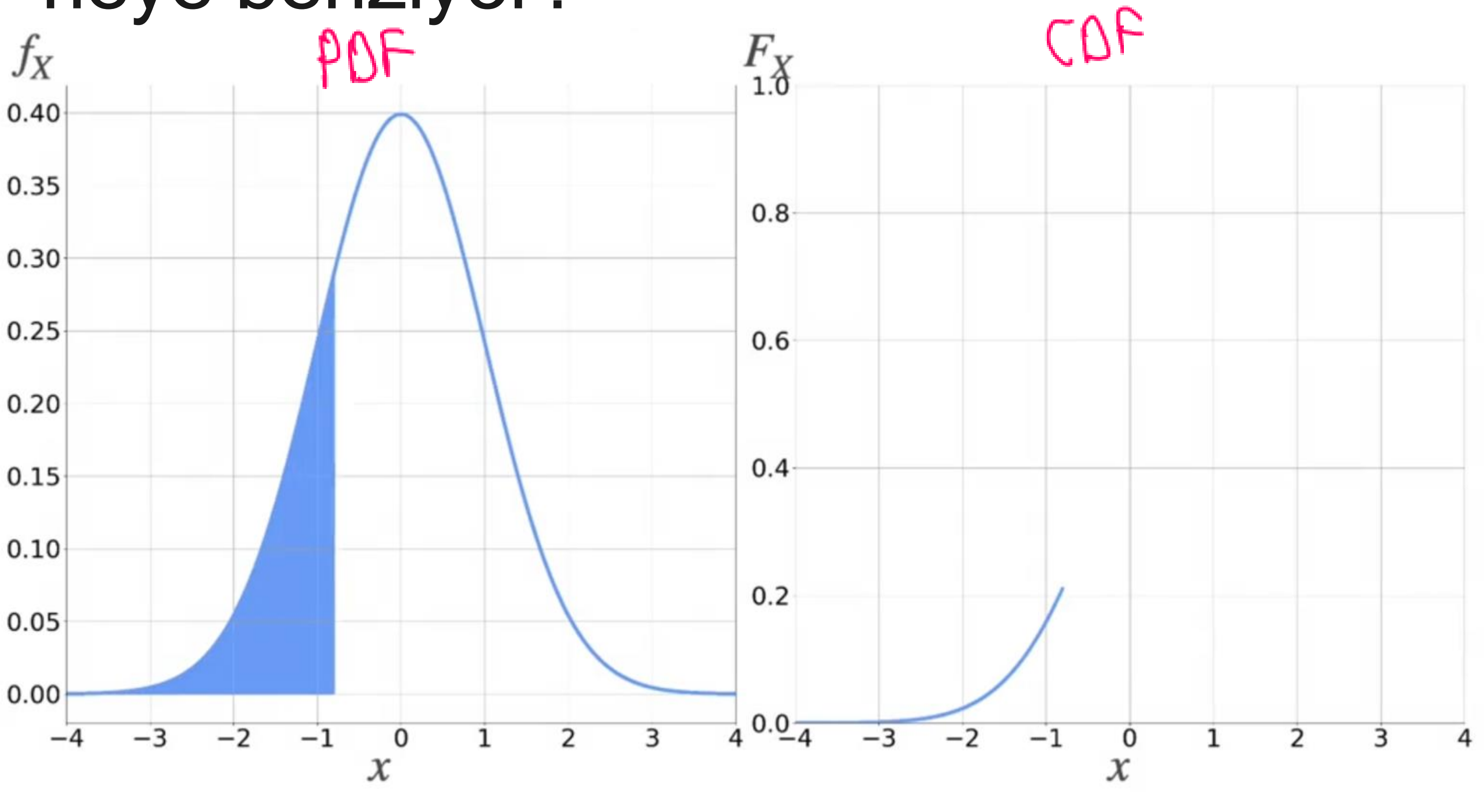
Standardization is crucial to compare variables of different magnitudes!

CDF neye benziyor?

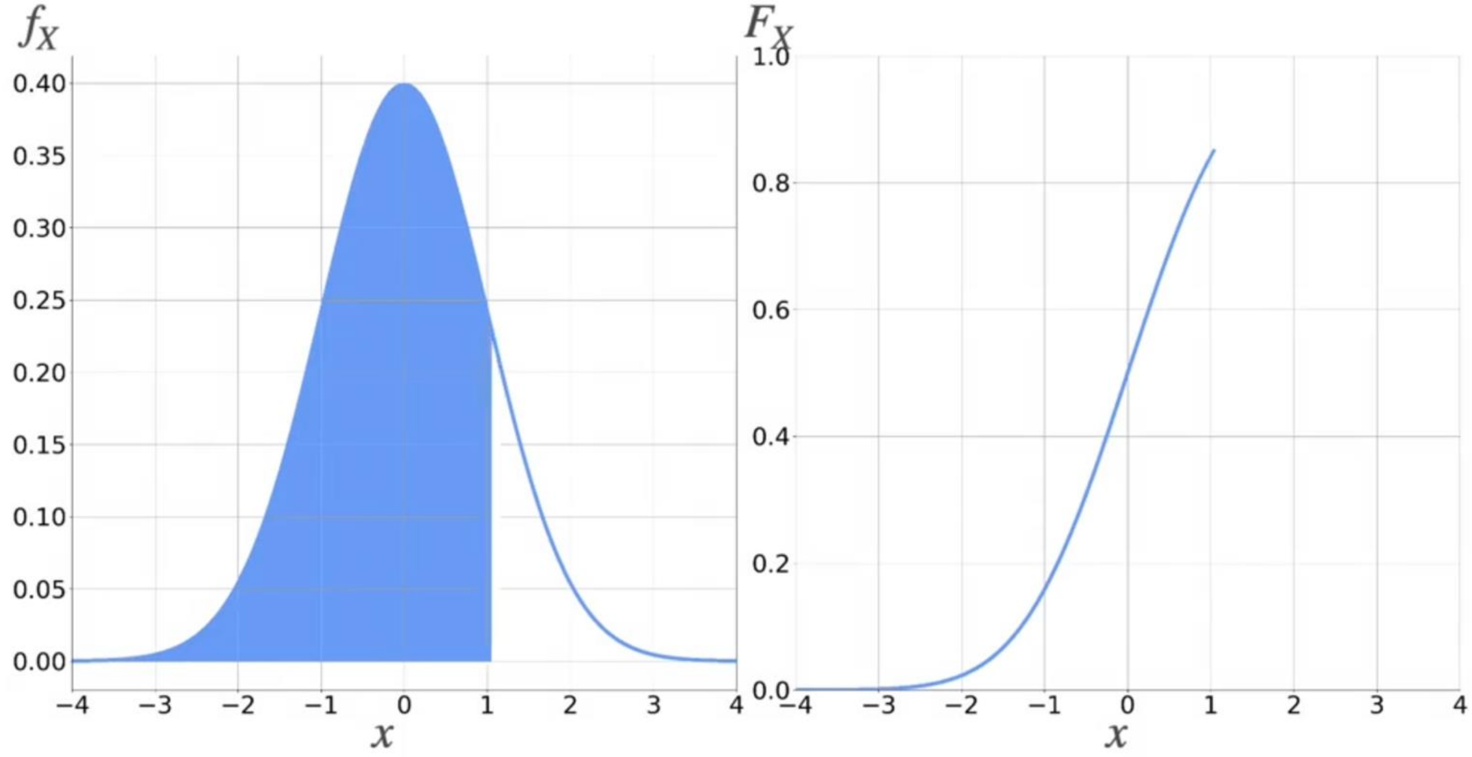


DeepLearning.AI

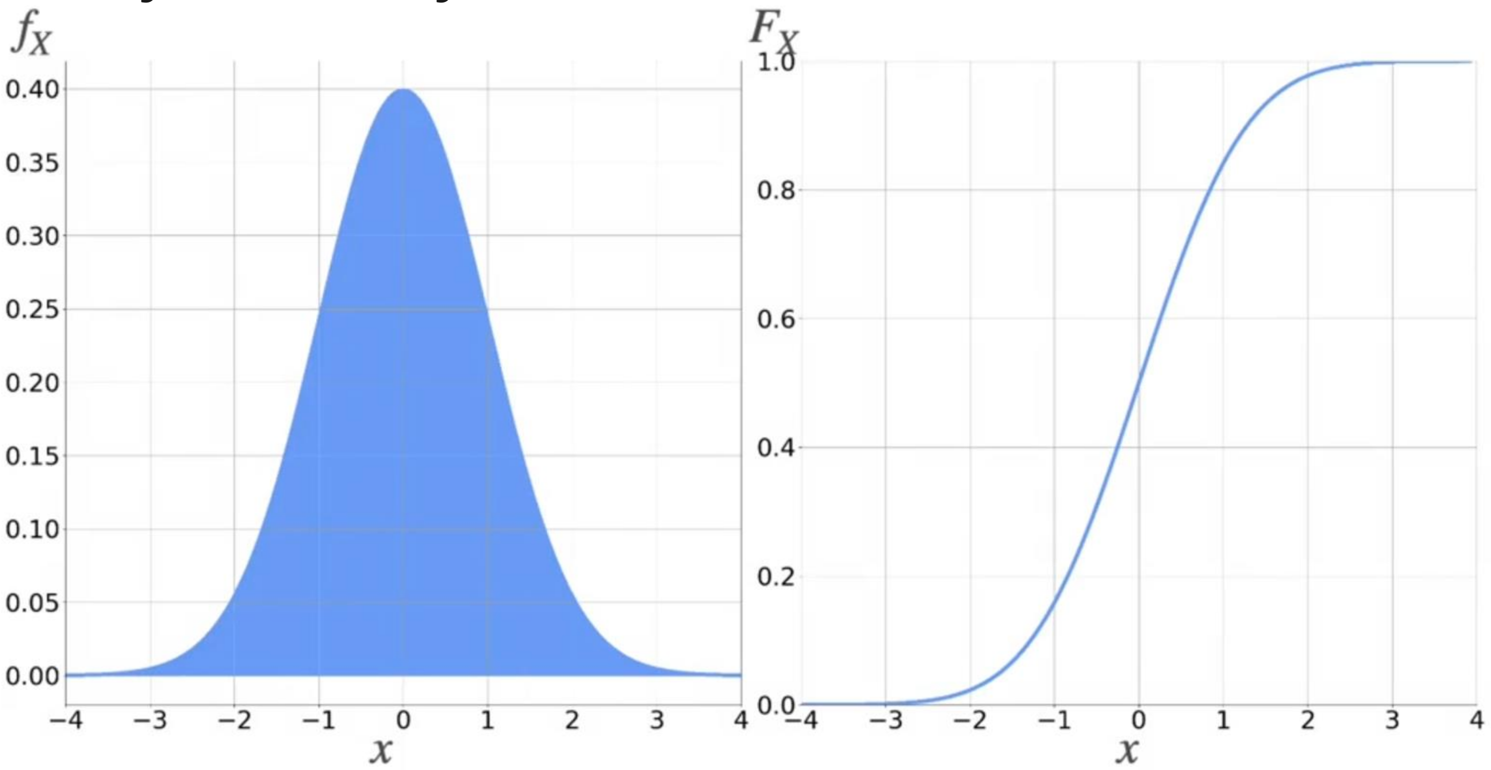
CDF neye benziyor?



CDF neye benziyor?

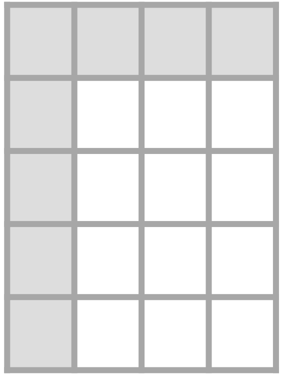


CDF neye benziyor?



PDF'den Olasılıkları Hesaplamak

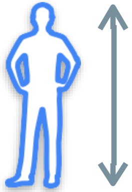
Bu matematik elle yapılamaz



Eski günlerde insanlar veri tablolarını kullanıyordu

Artık eğrinin altında kalan alanı sizin için yaklaşık olarak hesaplamak için bazı yazılımların yardımını kullanabilirsiniz!

Normal Dağılım: Uygulamalar



Boy

Kilo

IQ

Haberleşme kanalındaki gürültü

Genel olarak birçok bağımsız sürecin toplamı olan özellikler

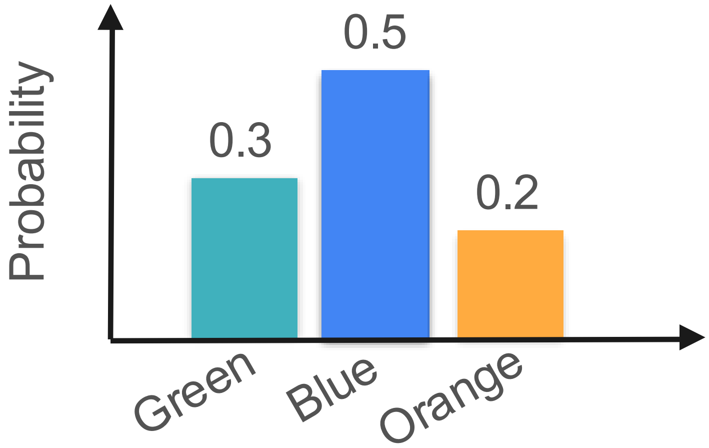
ML'deki birçok model, değişkenlerin normal dağılıma uyduğu varsayımıyla tasarlanmıştır.

DeepLearning.AI

Olasılık Dağılımları

Bir Dağılımdan Örnekleme

Bir Dağılımdan Örnekleme

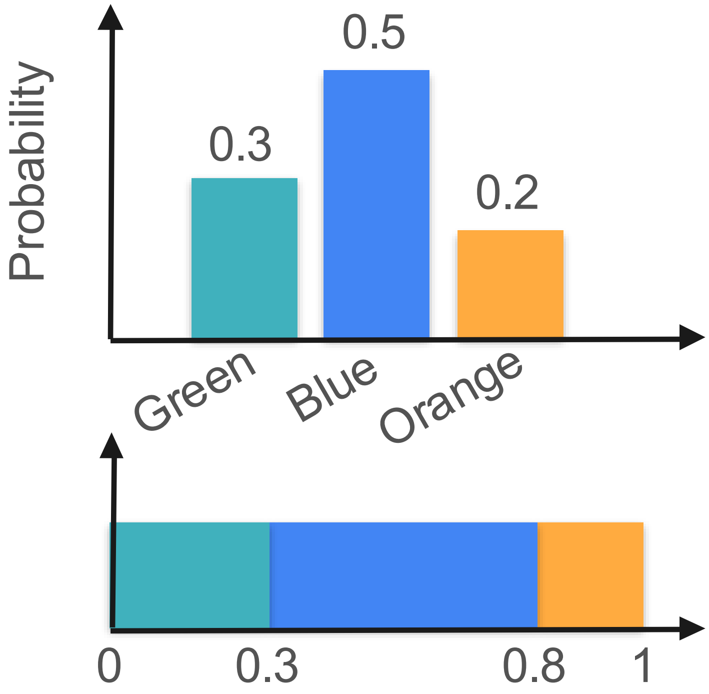


Diyelimki renklerimizin basit bir ayrık dağılımına sahipsiniz, üç olası sonuç yeşil, mavi ve turuncu

şimdi bu dağılımı takip eden rastgele bir veri örneği oluşturmak istediğiniz bir deney çalıştırmak istiyorsunuz. Peki bu dağıtımdan verileri nasıl örnekleyebilirsiniz?

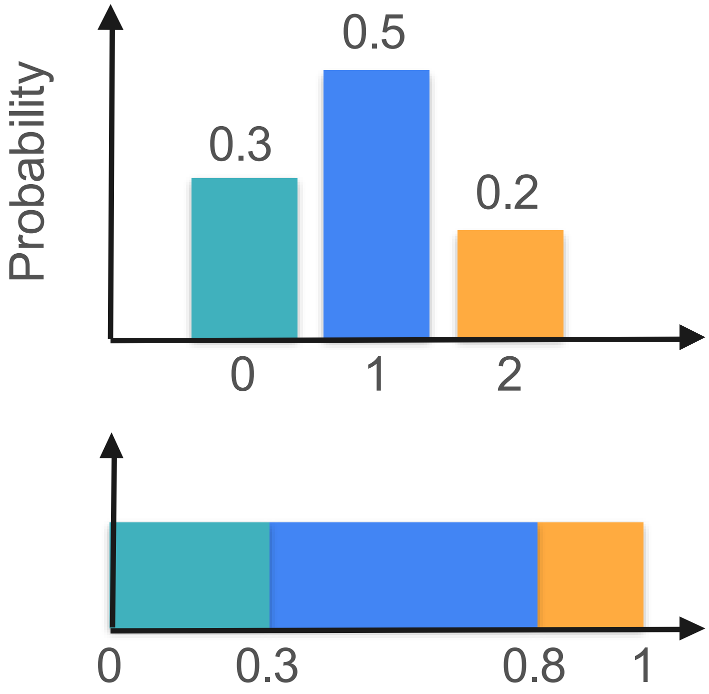
DeepLearning.AI

Bir Dağılımdan Örnekleme



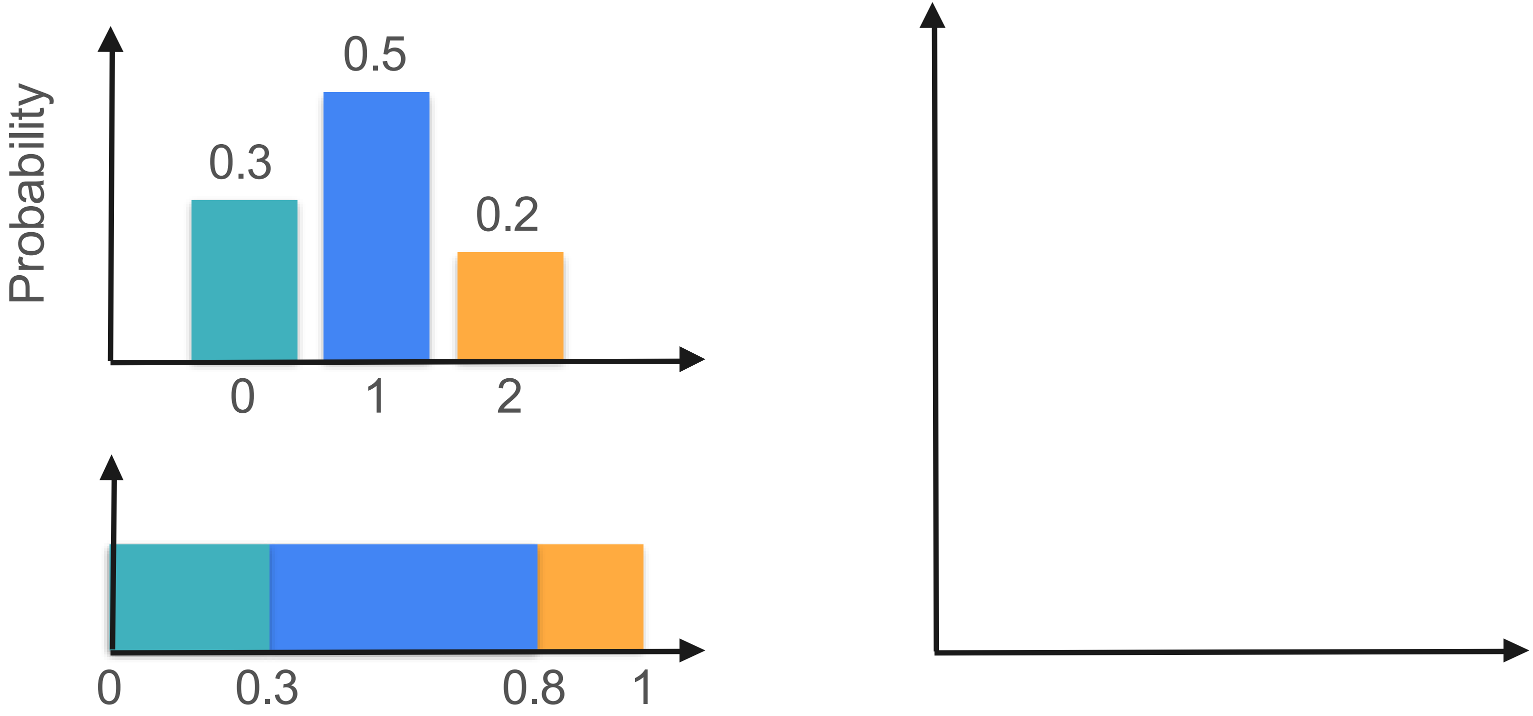
- **Adım 1**: 0 ile 1 arasında rastgele bir sayı üretin
- **Adım 2**: sayının hangi aralığa ait olduğunu bulun
  - [0, 0.3)
  - [0.3, 0.8)
  - [0.8, 1]
- **Adım 3**: Aralığa göre bir sonuç atayın

Bir Dağılımdan Örnekleme

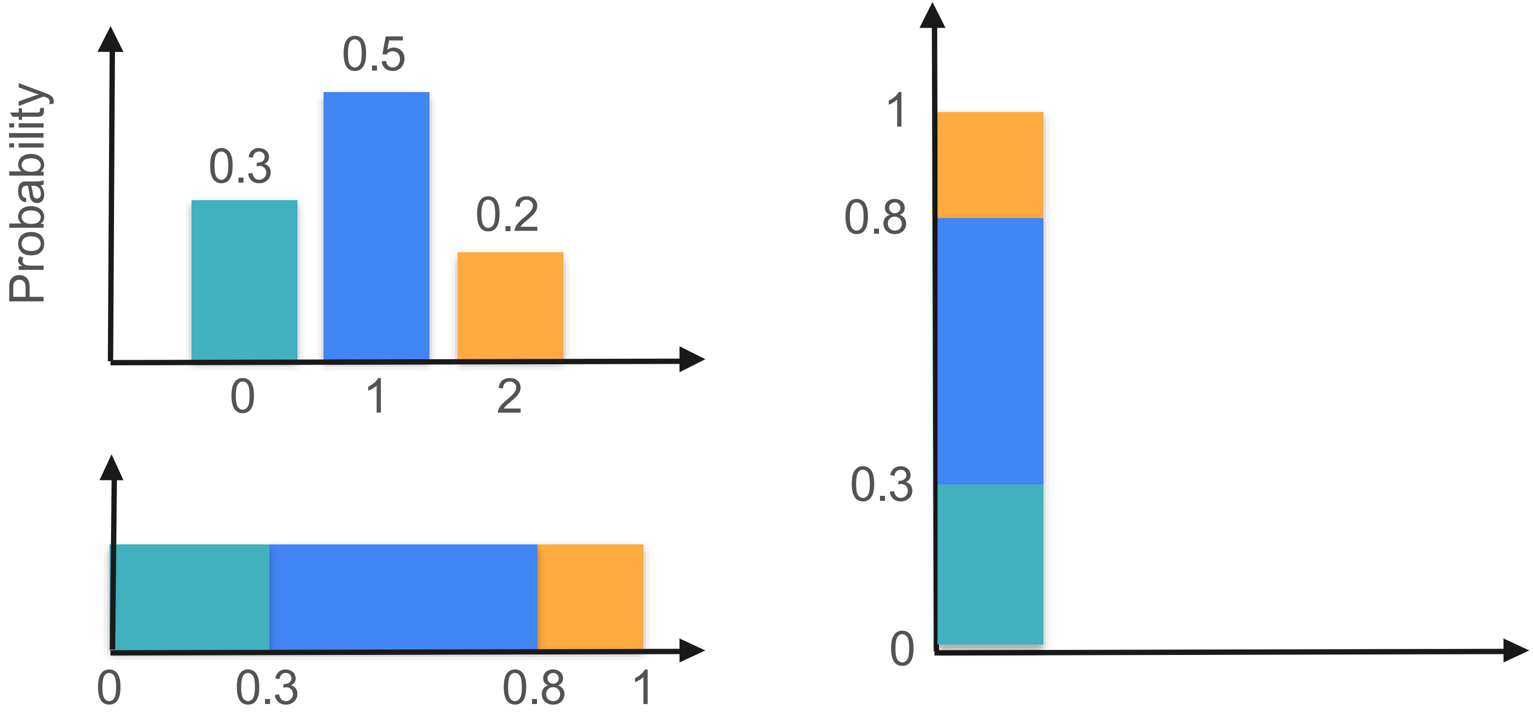


- **Adım 1**: 0 ile 1 arasında rastgele bir sayı üretin
- **Adım 2**: sayının hangi aralığa ait olduğunu bulun
  - [0, 0.3)
  - [0.3, 0.8)
  - [0.8, 1]
- **Adım 3**: Aralığa göre bir sonuç atayın

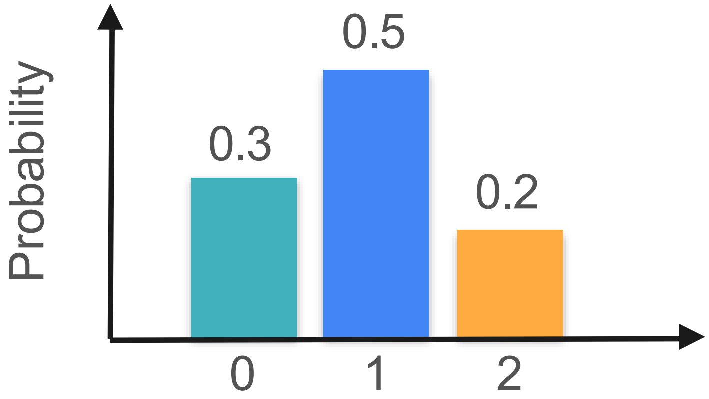
Bir Dağılımdan Örnekleme

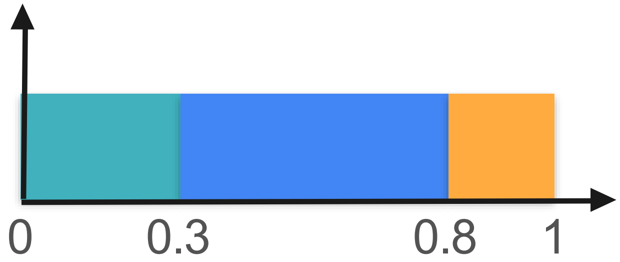


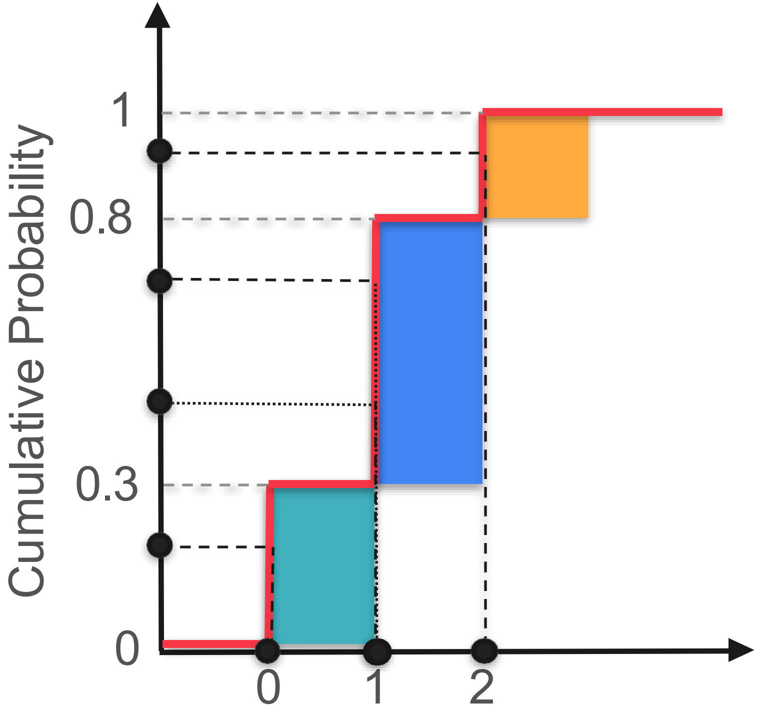
Bir Dağılımdan Örnekleme



Bir Dağılımdan Örnekleme





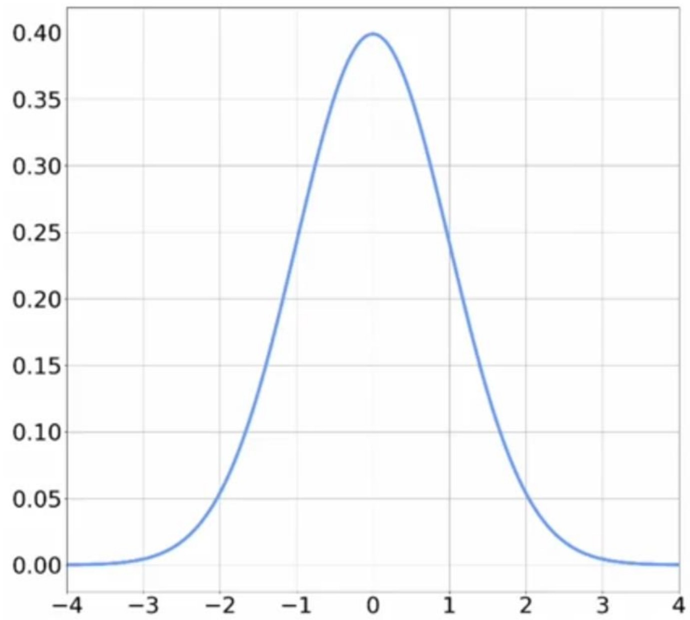


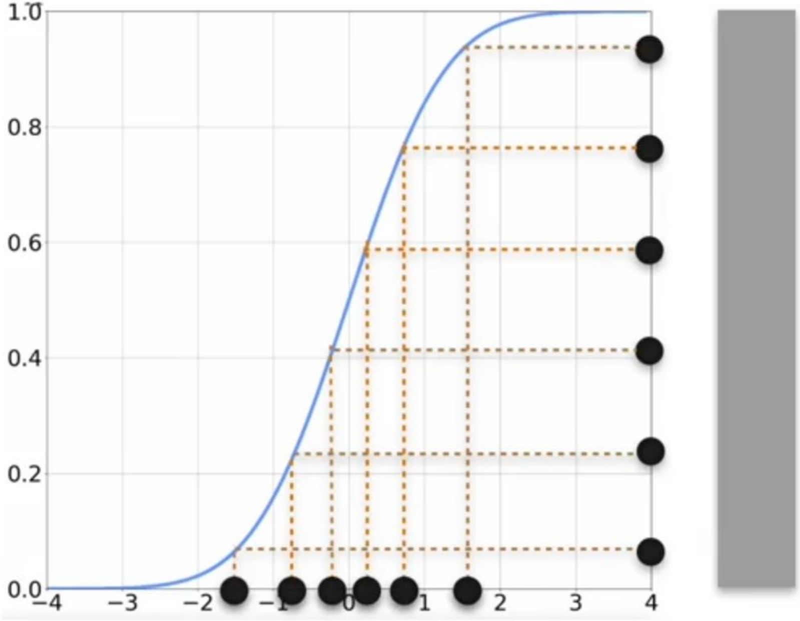
DeepLearning.AI

Diyelim ki soldaki Gauss dağılımına sahip olduğunuzda, bu dağılımdan rastgele seçmek istersiniz. Kolay değil çünkü alanları hesaplamak zor.

Normal Dağılımdan Örnekleme

Ama sağdaki CDF'ye bakarsanız ve o gri aralıktan eşit olarak seçersiniz.





Dolayısıyla CDF, hem ayrık hem de sürekli durum için, belirli bir dağılımdan örnekleme yapmak istediğinizde çok kullanışlı bir yöntemdir.

Normal Dağılımdan Örnekleme