

# Hafta 10



DeepLearning.AI

# Bazı Bilinen Dağılımlar

---

## 5.1 KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

### 5.1.1 Kesikli Düzgün Dağılım

**Tanım:** Bir rastgele deney sonucunda rastgele değişkenin alabileceği kesikli değerler aynı olasılıkla gerçekleşiyorsa bu değişkenin olasılık dağılımına düzgün dağılım denir. Buna göre değişkenin değer kümesinin eleman sayısı  $n$  ise  $X$  rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu;

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

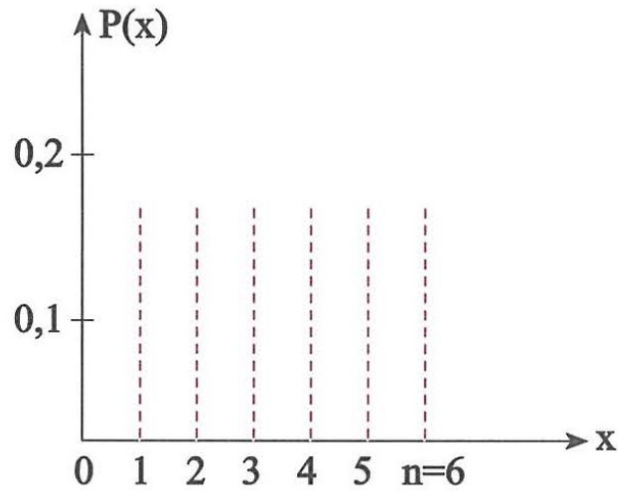
şeklindedir. Bu dağılımın bir tek parametresi vardır. O da  $n$ 'dir.

### ÖRNEK 5.1:

Hilesiz bir zar atılıyor.  $X$  rastgele değişkeni, zarın üst yüzüne gelen sayı olmak üzere,  $X$ 'in olasılık fonksiyonunu yazınız, grafiğini çiziniz.

### ÇÖZÜM 5.1:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ ve } n = 6 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$



## Kesikli düzgün dağılımın beklenen değeri ve varyansı

$X$  rastgele değişkeni kesikli düzgün dağılıma sahip ise beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi bulunur.

$$E(X) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X^2) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left[ \frac{n+1}{2} \right]^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

elde edilir.

### ÖRNEK 5.3:

Bir torbada 1 den 10 a kadar numaralanmış birbirinin aynısı 10 top vardır. Torbadan rastgele seçilen bir topun numarasını  $X$  rastgele değişkeni gösterirse  $X$ 'in olasılık fonksiyonu nasıldır?

### ÇÖZÜM 5.3

Topların seçilme olasılıkları eşit olduğundan,

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x = 1, 2, \dots, 10 \\ 0 & \text{Diğer Durumlarda} \end{cases}$$

Bir önceki problemde verilen  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

### ÇÖZÜM 5.4:

Kesikli düzgün dağılımın beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \mu = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5,5$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{100-1}{12} = \frac{99}{12} = 8,25$$

olarak bulunur.

## 5.1.2 Bernoulli Dağılımı

**Tanım:** Bir rastgele deney yapıldığında bu deneyin sadece iki mümkün sonucu elde ediliyorsa, böyle bir deneye Bernoulli deneyi denir. Bernoulli deneyinde elde edilecek sonuçlardan biri “başarı” olarak nitelendiriliyorsa diğeri “başarısızlık” olacaktır. Bir para atışında ya yazı ya da tura gelir. A ilacı başağrınızı ya geçirir ya geçirmez. Başarı sonucu elde edildiğinde  $x = 1$ , başarısızlık sonucu elde edildiğinde  $x = 0$  değerlerini olan  $X$  rastgele değişkenine Bernoulli değişkeni denir. Bu değişkenin olasılık dağılımına Bernoulli dağılımı adı verilir.

Deney sonucunda başarı elde etme olasılığı  $p$  ise,  $X$  rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(x) = \begin{cases} 1-p = q & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada bir tek parametre vardır. O da  $p$  dir ve  $0 < p < 1$  veya bu olasılık fonksiyonu

$$P(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde de gösterilebilir.  $p+q=1$  olduğu unutulmamalıdır.

**Bernoulli dağılımının moment çıkaran fonksiyonu, aritmetik ortalama ve varyansı**

$$E(X) = \mu = p$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= M''(0) - [M'(0)]^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p) = pq \end{aligned}$$

### ÖRNEK 5.5:

Gürcan bey'in pazar gecesi sinemaya gitme olasılığı 0,3 olduğuna göre; Gürcan beyin gecesine ilişkin olasılık fonksiyonunu yazın.

### ÇÖZÜM 5.5:

Bir tek Gürcan bey'in sinemaya gidip gitmemesi olayı söz konusu olduğuna göre Bernoulli dağılımı söz konusudur.  $X$  rastgele değişkeni Gürcan Bey sinemaya giderse 1, gitmezse 0 değerini alan bir Bernoulli değişkenidir.

Olasılık fonksiyonu;

$$P(x) = \begin{cases} 0,3 & x = 1 \text{ ise} \\ 0,7 & x = 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

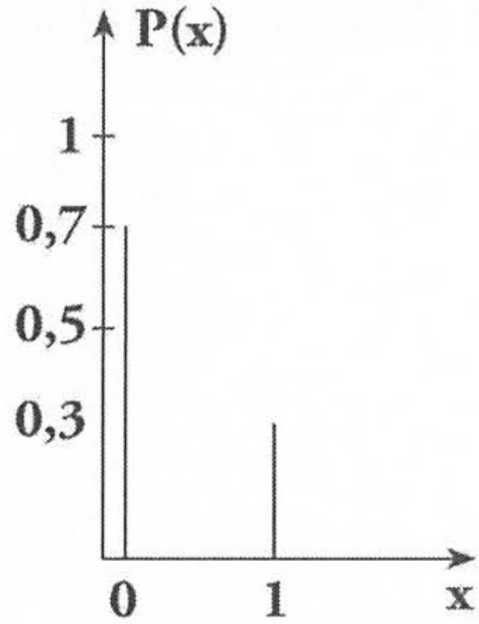
veya



$$P(x) = \begin{cases} (0,3)^x (0,7)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

$x = 0,1$

Diğer durumlarda



### ÖRNEK 5.6:

X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. X'in moment çıkarıcı fonksiyonunu beklenen değerini, varyansını bulunuz.

## ÇÖZÜM 5.6:

Bu dağılım parametresi  $p = \frac{1}{4}$  olan bir Bernoulli dağılımıdır.

$$E(X) = \mu = p = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}(X) = pq = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

### 5.1.3 Binom Dağılımı

**Tanım:** Sadece iki sonuç veren bir Bernoulli deneyinin n kez birbirinden bağımsız ve aynı koşullar altında tekrar ettiği biliniyorsa ve sıra gözetilmeden başarı türünden olan sonuçlarla ilgileniliyorsa bu dağılıma **Binom dağılımı** denir. Böyle bir dağılıma sahip değişkene **binom değişkeni** adı verilir.

n tekrar sonunda x kez başarılı sonuç ve n-x kez başarısız sonuç elde edilmesi olasılığı

$$P(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur.

Burada  $0 < p < 1$  ve  $n$ , bir tamsayı olup  $n \geq 1$  dir. Yani Binom olasılık fonksiyonunun  $n$  ve  $p$  gibi iki parametresi vardır.

$n = 1$  olduğunda Binom rastgele değişkeni bir Bernoulli rastgele değişkeni olur.  $x = 0, 1, 2, \dots, n$  için karşı gelen olasılıklar,

x	0	1	2	...	n
P(x)	$q^n$	$\binom{n}{1} p q^{(n-1)}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{(n-2)}$	...	$p^n$

şeklinde olup

$$(p + q)^n = q^n + \binom{n}{1} p q^{(n-1)} + \binom{n}{2} p^2 q^{(n-2)} + \dots + p^n$$

elde edilir. Bu açılıma **Binom açılımı** adı verilir. Olasılıklar toplamı 1 olduğundan  $(p + q)^n = 1$ 'dir. Binom rastgele değişkeni, “başarıların sayısı”dır.

$$E(X) = np$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= n^2 p^2 + npq - n^2 p^2 \\ &= npq \end{aligned}$$

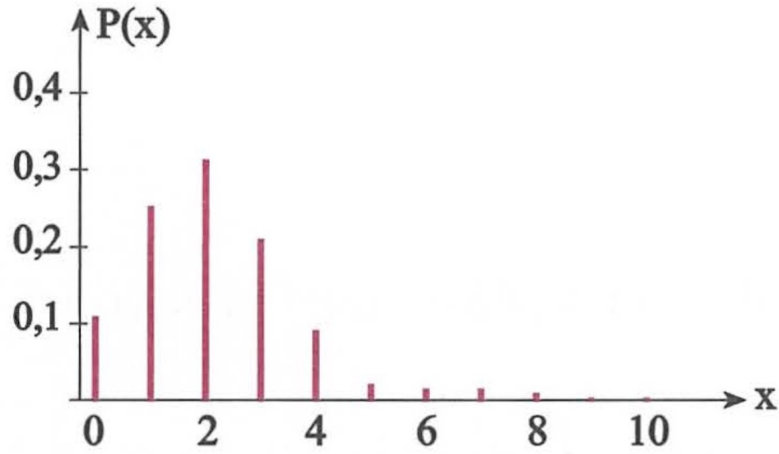
### ÖRNEK 5.7:

Herbirinin red etme olasılığı 0,2 olan 10 test için olasılık fonksiyonu nasıldır?

### ÇÖZÜM 5.7:

Herbir test için 2 sonuç vardır. Red etme ve kabul etme.  $X$  rastgele değişkeni bir Binom değişkenidir. Çünkü böyle 10 test vardır.

$$P(x) = \begin{cases} \binom{10}{x} (0,2)^x (0,8)^{10-x} & x = 0, 1, 2, \dots, 10 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$



### ÖRNEK 5.8:

Hilesiz bir madeni para 10 kez atılıyor yazı gelme sonucu ile ilgileniliyor.

- a) Tam 2 kez yazı gelmesi olasılığı nedir?
- b) En az 8 kez yazı gelmesi olasılığı nedir?
- c) Hiç yazı gelmemesi olasılığı nedir?

Para hilesiz olduğuna göre yazı ve tura gelme olasılıkları eşit ve  $1/2$  dir. Deney 10 kez tekrarlanmış olup iki mümkün sonuç olduğundan bir Binom dağılımı söz konusudur.  $X$  rastgele değişkeni 10 atıştaki yazı sayısı olsun.

$$\text{a) } P(X=2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0,0439$$

$$\text{b) } P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= 0,0439 + 0,0098 + 0,0010$$

$$= 0,0547$$

$$\text{c) } P(X=0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\cong 0,00098$$

### ÖRNEK 5.12:

Bir A takımının B takımına karşı oyunu kazanma olasılığı  $\frac{2}{3}$  dür. A takımı

B ile 4 maç yaptığında A takımının.

- a) 2 defa galip
- b) En az bir defa galip
- c) Maçların yarısından fazlasını kazanma olasılığı nedir?

### ÇÖZÜM 5.12:

Oyun sadece 2 sonuçlu olarak düşünölsün. A takımı, B'ye karşı oynadığında ya kazanıyor veya kaybediyor. X rastgele değışkeni A takımının B'ye karşı oyunu kazanma sayısı olsun. Ayrıca

$$p = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{ve} \quad n = 4$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X = 2) &= \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4!}{(4-2)!2!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 0,2963 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{b) } P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= 0,9877\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } P(X > 2) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \binom{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 0,3951 + 0,1975 \\ &= 0,5926\end{aligned}$$

### ÖRNEK 5.14:

Hilesiz bir zar 2400 kez atılıyor. Kaç atışta üstyüze 1 gelmesini beklersiniz? Üstyüze 1 gelmesine ilişkin varyans kaçtır?

Zar atıldığında  $X$  rastgele değişkeni üstyüze gelen 1 lerin sayısını gösterebilir.  $X$  rastgele değişkeni Binom dağılımına sahiptir. Çünkü üstyüze 1 ya gelecektir veya gelmeyecektir. O halde Binom dağılımının beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 2400 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 400 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Hilesiz bir zar 2400 kez atılırsa teorik olarak 400 kez üstyüze 1 gelmesi beklenir. Uygulamada ise farklı sayıda 1 gelebilir. Varyans ise,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= npq \\ &= 2400 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ &= 333,3\bar{3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### 5.1.5 Geometrik Dağılım

**Tanım:** Arka arkaya  $n$  kez tekrarlanan bir Bernoulli deneyinde istenen sonucun (başarı veya başarısızlık) ilk kez elde edilinceye kadar yapılan deney sayısı olan  $X$ 'e geometrik rastgele değişken denir. Bu değişkenin dağılımı **geometrik dağılım** adını alır.

$$P(x) = \begin{cases} q^{x-1} p & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{Diğer Durumlarda} \end{cases}$$

Bu olasılık dağılımının parametresi  $p$ ,  $0 < p < 1$  dir. Bu bir geometrik dizi olduğundan,

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = \frac{p}{1-q} = p(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = p \frac{1}{1-q} = 1$$

yazılır. Bu, 500 defa başarısız bile olsanız sonunda başarıyı elde edeceksiniz demektir. Çünkü olasılıklar toplamı 1'dir.

$$E(X) = \mu = \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2q + p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

### ÖRNEK 5.19:

Bir atıcının her atışta hedefi vurma olasılığının aynı ve  $2/3$  olduğu biliniyor. Arka arkaya yapılan atışlar sonucunda hedefi ilk kez vurması için gereken atış sayısı  $X$  olduğuna göre;

- a)  $X$ 'in olasılık fonksiyonunu yazınız.
- b) Hedefi ilk kez ikinci atışta vurma olasılığı nedir?
- c) Hedefi ilk kez en çok üçüncü atışta vurma olasılığı nedir?
- d) Hedefi ilk kez en çok beşinci atışta vurma olasılığı nedir?
- e) Hedefi ilk kez vuruncaya kadar ortalama kaç atış gerekir ve  $X$ 'in varyans nedir?



$$\text{a) } P(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\text{b) } P(X = 2) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} \\ &= \frac{2}{3} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right] = 0,96 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \leq 5) &= P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=5) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} + \dots + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} \\ &= \frac{2}{3} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{81} \right] = 0,9958 \end{aligned}$$

$$\text{e) } E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{2/3} = 1,5$$

$$\text{Var}[X] = \frac{q}{p^2} = \frac{1/3}{4/9} = 0,75$$

## ÖRNEK 5.20:

Bir kutuda 6 kusurlu 9 kusursuz parça vardır. Parçalar ardışık olarak yerine tekrar iade edilerek çekiliyor.

- a) İlk kusursuz parçayı çekinceye kadar ortalama kaç parça çekmek gerekir?
- b) İlk kusurlu parçayı çekinceye kadar ortalama kaç parça çekmek gerekir?

### ÇÖZÜM 5.20:

Dağılım bir geometrik dağılım olduğuna göre;

$$\text{a) } E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{9/15} = \frac{15}{9} = 1,67$$

$$\text{b) } E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{6/15} = 2,5$$

olarak bulunur.

## 5.2 SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

**Tanım:**  $X$  rastgele değişkeninin sürekli olması durumunda  $X$ 'e ilişkin olasılıkların dağılımına **sürekli dağılım** denir.

$X$  rastgele değişkenin sürekli olması uygulamada belli bir değeri alamaması demektir. Örneğin 6 yaşından küçük çocukların boyları, hesap makinasının pilinin dayanma süresi, internete bağlanma hızı gibi. Bu tür örneklerde de görüldüğü gibi daha çok değişkenin değer aralığı ile ilgilenilir.

Sürekli dağılımların olasılık fonksiyonu **olasılık yoğunluk fonksiyonu** adını alır ve genellikle  $f(x)$  ile gösterilir.

Aşağıda bazı önemli sürekli dağılımlar incelenmiştir.

## 5.2.1 Sürekli Düzgün Dağılım

**Tanım:** a ve b verilmiş iki sabit değer ve X, [a, b] kapalı aralığında bir sürekli rastgele değişken olmak üzere, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde ise böyle X rastgele değişkenine **düzgün dağılmış rastgele değişken** ve f(x)'e de **düzgün dağılım** denir.

$X \sim D [a, b]$  şeklinde gösterilir.

$X \sim D [a, b]$  şeklinde gösterilir.

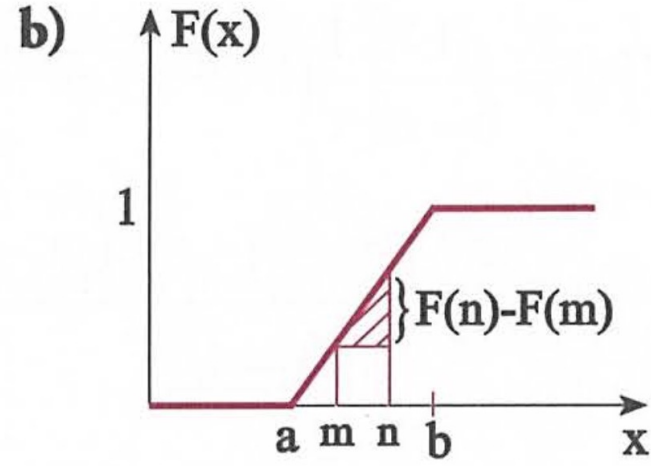
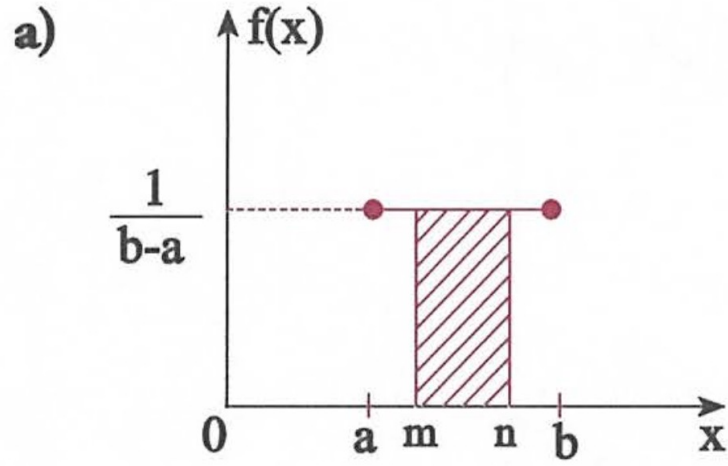
Düzgün dağılımın birikimli olasılık fonksiyonu veya dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

şeklinde verilir. Burada

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_a^x \frac{1}{b - a} dx = \frac{x - a}{b - a}$$

olduğu unutulmamalıdır.



**Şekil 5.1:** Sürekli Düzgün Dağılımın

**a)** Olasılık Yoğunluk  
Fonksiyonu,

**b)** Birikimli Olasılık  
Yoğunluk Fonksiyonu

Düzgün bir dağılıma sahip olan  $X$  rastgele değişkeninin verilen bir aralıkta bulunma olasılığı  $[m, n] \subset [a, b]$  olmak üzere;

$$P(m \leq X \leq n) = \int_m^n \frac{1}{b-a} dx \text{ veya birikimli olasılık fonksiyonu kullanılarak,}$$

$$P(m \leq X \leq n) = F(n) - F(m)$$

şeklinde bulunur. Bu olasılık yukarıda verilen grafiklerdeki taralı alanlara eşittir.

$$\frac{b+a}{2} = E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = M''(0) - [M'(0)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### ÖRNEK 5.33:

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğuna göre

- a)  $P(1 \leq X \leq 3)$
- b)  $P(X \geq 3)$
- c)  $P(X \leq 3 \setminus X \geq 1)$  olasılıklarını hesaplayınız.
- d)  $E(X)$  ve  $\text{Var}(X)$  nedir?



### ÇÖZÜM 5.33:

$$\text{a) } P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } P(X \geq 3) = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } P(X \leq 3 \setminus X \geq 1) = \frac{P(1 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} = \frac{\int_1^3 \frac{1}{4} dx}{\int_1^4 \frac{1}{4} dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{d) } E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{4}{3}$$

### ÖRNEK 5.34:

Önceki örneğin  $a$  ve  $b$  sıklarını birikimli olasılık fonksiyonunu kullanarak çözüünüz.

### ÇÖZÜM 5.34:

$$P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{4-0} dx = \frac{x}{4} & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - F(3)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

## 5.2.2 Üstel Dağılım

**Tanım:**  $\lambda > 0$  parametre olmak üzere  $X$  sürekli rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

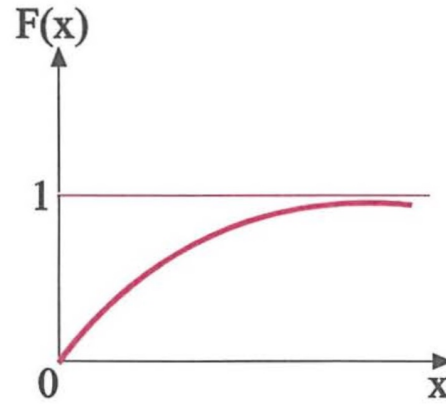
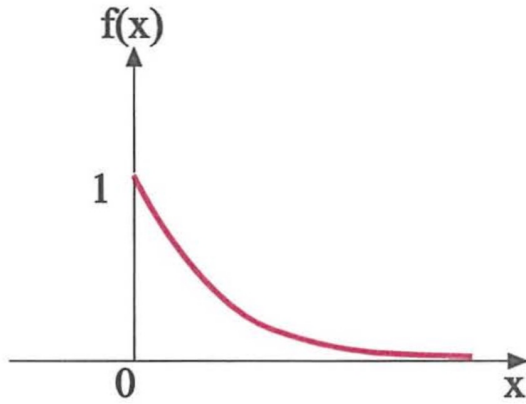
şeklinde ise  $X$  **üstel dağılmış rastgele değişken** adını alır  $f(x)$  fonksiyonuna da **üstel dağılım** adı verilir.

Bu dağılımın tek parametresi vardır. O da  $\lambda$  dır.

## Birikimli üstel dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 1 & x \rightarrow \infty \end{cases}$$



Şekil 5.2: Üstel Dağılımın

a) Olasılık Fonksiyonu

b) Birikimli Olasılık Fonksiyonu

$$\frac{1}{\lambda} = E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left[ \frac{1}{\lambda} \right]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

### ÖRNEK 5.36:

Üstel dağılımın bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösteriniz.



### ÇÖZÜM 5.36:

Bunun için  $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$  olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} \right) (0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} = 0$  olduğu hatırlanmalıdır.

### ÖRNEK 5.37:

Parametresi  $\lambda = 2$  olan bir üstel  $X$  değişkenine ilişkin aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

- a)  $P(X \leq 2)$
- b)  $P(2 \leq X \leq 4)$
- c)  $P(X \leq 4 \setminus X > 2)$

### ÇÖZÜM 5.37:

Önce  $\lambda = 2$  olan bir üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ifade edilir.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\text{a) } P(X \leq 2) = \int_0^2 2e^{-2x} dx = 0,9817 \cong \%98$$

$$\text{b) } P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 2e^{-2x} dx = 0,0179$$

$$\text{c) } P(X \leq 4 \setminus X > 2) = \frac{P(x \leq 4, x > 2)}{P(x > 2)} = \frac{0,0179}{0,0183} = 0,978$$

### ÖRNEK 5.38:

Yukarıdaki soruyu birikimli fonksiyonu kullanarak çözünüz.

### ÇÖZÜM 5.38:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 1 & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

a)  $P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-4} = 0,9817$

b)  $P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2)$   
 $= (1 - e^{-8}) - (1 - e^{-4}) = e^{-4} - e^{-8} = 0,0179$

c)  $P(X \leq 4 \setminus X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 4)}{P(X > 2)} = \frac{0,0179}{0,0183} = 0,978$



### 5.2.3 Normal Dağılım

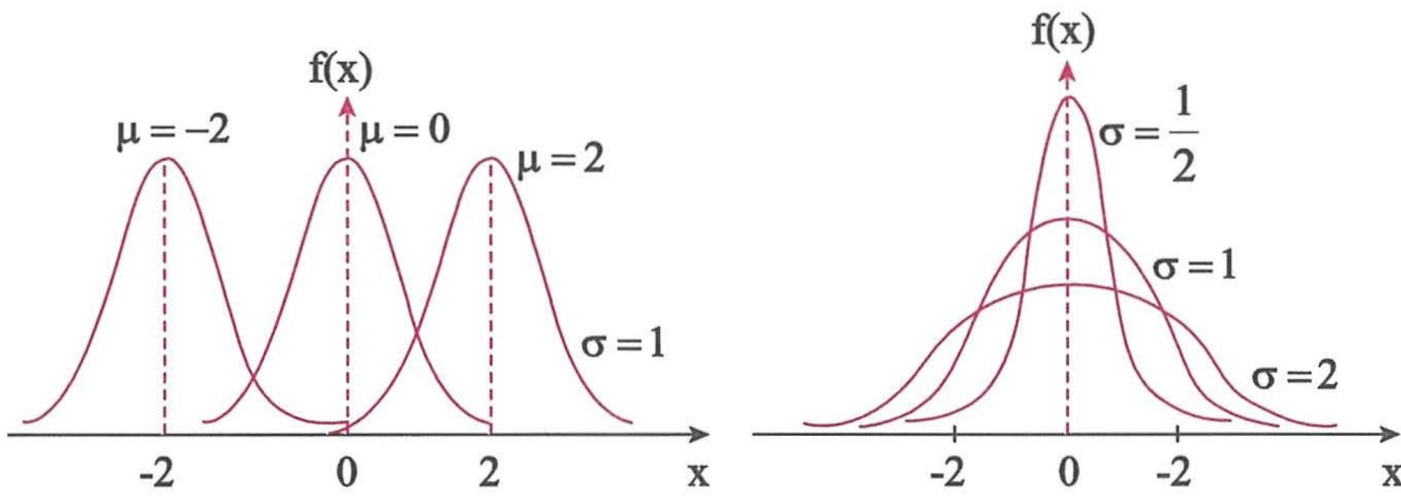
**Tanım:** Bir  $X$  sürekli rastgele değişkeni;  $\mu$  ortalama ve  $\sigma^2$  varyanslı olmak üzere;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < +\infty; \quad \sigma > 0$$

yoğunluk fonksiyonuna sahip ise bu  $X$  değişkeni **normal dağılıma sahiptir** denir ve  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ile ifade edilir. Burada  $\pi = 3.14159$   $e = 2,7 1828$

Normal dağılım çok sık kullanılan bir sürekli dağılım şeklidir. Uygulamada birçok rastgele değişken normal dağılım gösterir. Rastgele seçilen kişilerin boyları, rastgele seçilen köpeklerin ağırlıkları, rastgele seçilen yağmurlu günlerde  $m^2$ 'ye düşen yağmur miktarı gibi.

$\mu$  ve  $\sigma$  nın belli değerleri için fonksiyonun grafiği çan şeklindedir ve her iki yönde  $x$  eksenine asimptot olan bir eğridir.

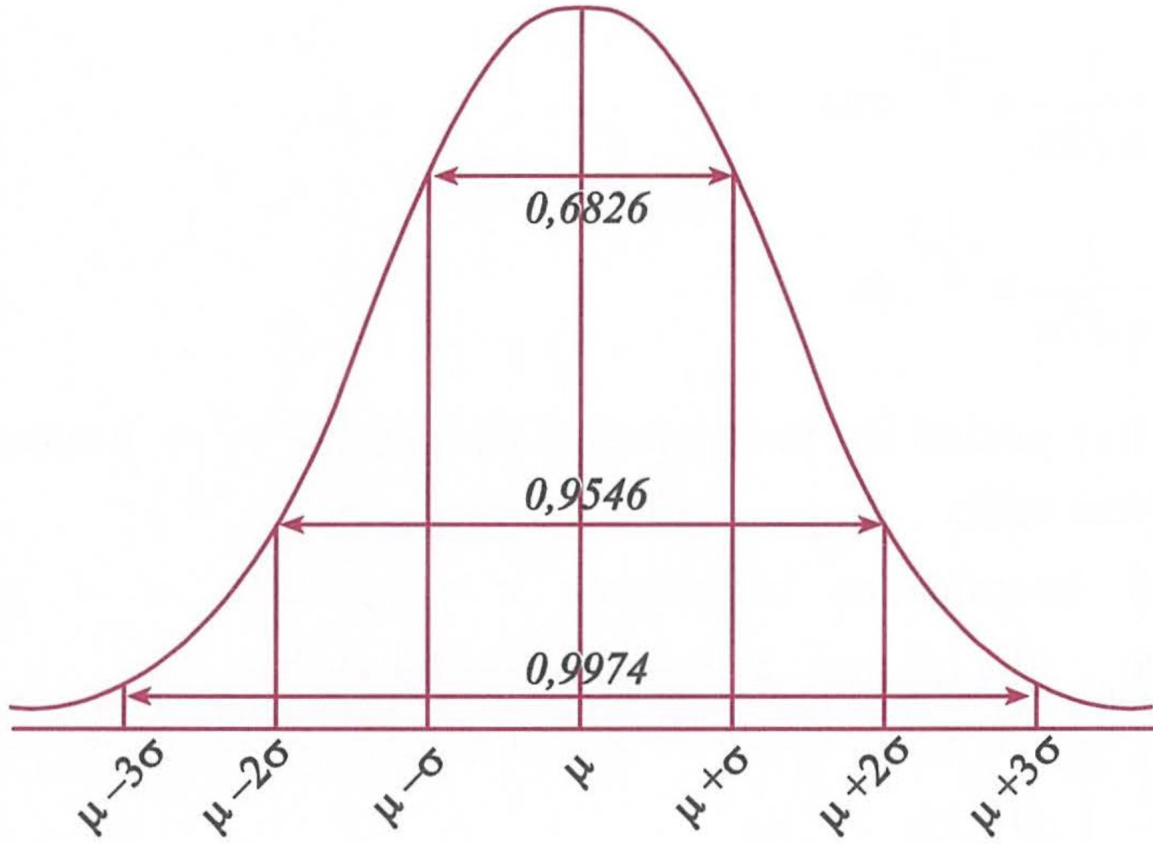


**Şekil 5.3:**

**a)** Varyansları aynı, ortalamaları farklı dağılımlar.

**b)** Ortalamaları aynı, varyansları farklı dağılımlar.

Yukarıda aynı standart sapmalı farklı ortalamalı ve farklı standart sapmalı aynı ortalamalı çeşitli normal dağılım eğrileri verilmiştir. Standart sapma küçüldükçe ortalama civarında yoğunluğun arttığına dikkat edilmelidir. Ayrıca aritmetik ortalamadan farklı uzaklıktaki eğri altında kalan alanlar aşağıdaki şekilde verilmiştir.



**Şekil 5.4:** Normal dağılımda  $\mu$  ve  $\sigma$  parametrelerine göre eğri altında kalan alanlar (olasılıklar)

### **Normal dağılımın özellikleri;**

1. Dağılım simetrik olup aritmetik ortalaması mod ve medyanı birbirine eşittir ve eğriyi tam ortadan ikiye bölerler.

2. Dağılım  $x = \mu$  de bir maksimuma sahiptir ve  $Y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

3. Eğrinin altında kalan alan 1'e eşittir. Yani  $f(x)$  bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

3. özellik şu şekilde gösterilebilir;

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için  $\frac{x-\mu}{\sigma} = z$  alınırsa  $dx = \sigma dz$  olur. Böylece

## 5.2.4 Standart Normal Dağılım

**Tanım:** Ortalaması  $\mu = 0$ , varyansı  $\sigma^2 = 1$  ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < +\infty$$

olan normal dağılıma **standart normal dağılım** adı verilir.

Bu fonksiyonun gösterdiği eğri  $f(z)$  eksenine göre simetriktir. Bu eğrinin maksimumu  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$  noktasıdır. Eğrinin altında kalan alan 1 dir.

$Z \sim N(0, 1)$   $a, b \in \mathbb{R}$  ve  $a < b$  olduğunda  $X \sim N(\mu, \sigma)$  rastgele değişkeninin  $[a, b]$  aralığında olma olasılığı

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

yardımı ile bulunur. Ancak bu integrali bulmak zaman alıcı ve zordur. Bu nedenle standart normal tablolar adı verilen tablolar oluşturulmuştur.

Z nin birikimli olasılık fonksiyonu;

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad [F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1]$$

şeklinde olup

$$z = 0 \text{ için } x = \mu \quad \text{ve } F(0) = 0,50$$

$$z = 1 \text{ için } x = \mu + 1.\sigma \quad \text{ve } F(1) = 0,8413$$

$$z = 2 \text{ için } x = \mu + 2.\sigma \quad \text{ve } F(2) = 0,9777$$

$$z = 3 \text{ için } x = \mu + 3.\sigma \quad \text{ve } F(3) = 0,9987$$

### ÖRNEK 5.40:

X rastgele değişkeninin ortalaması  $\mu$  ve varyansı  $\sigma^2$  olmak üzere normal dağıldığı biliniyor.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

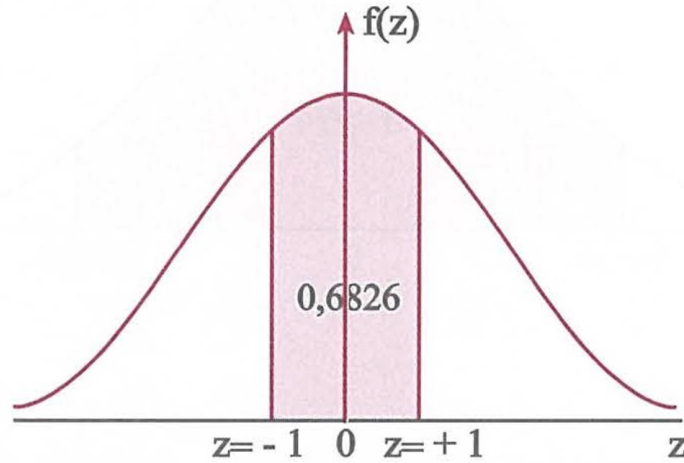
a)  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

b)  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$

c)  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Bu olasılıkları elde edebilmek için standart normal dağılıma geçmek gerekir. Çünkü standart normal dağılım tablolarından yararlanarak soru kolayca çözülebilir. EK 1

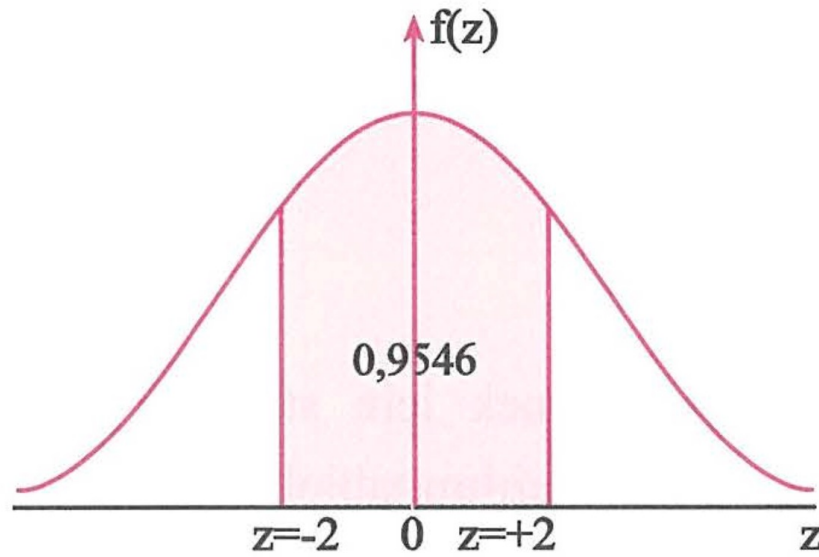
$$\begin{aligned} \text{a) } P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P\left(\frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} < Z < \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-1 < Z < +1) \\ &= P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < +1) \\ &= 0,3413 + 0,3413 \\ &= 0,6826 \end{aligned}$$



Bu demektir ki; birimlerin %68,26 sı ortalamadan  $\mp 1\sigma$  sapmanın içine düşer veya  $X$  rastgele değişkeninin  $\mp 1\sigma$  sapmalar arasında bulunma olasılığı 0,6826 dır.

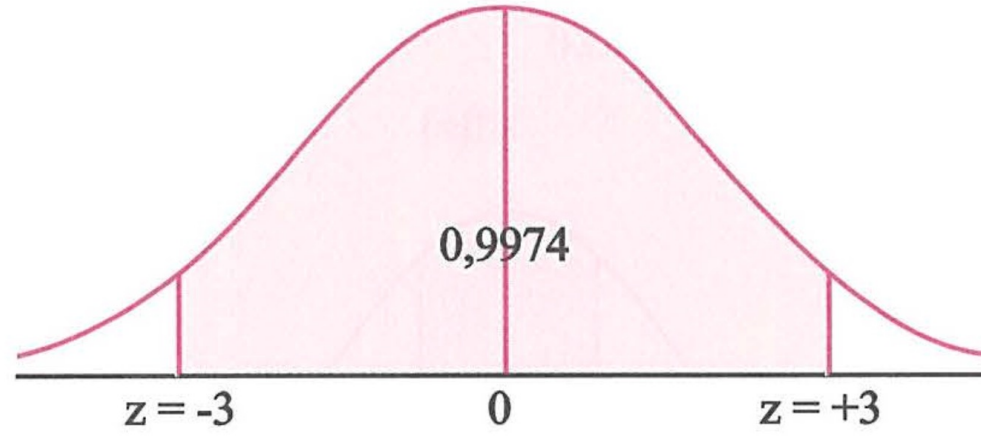
$$\begin{aligned}\text{b) } P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= P\left(\frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} < Z < \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-2 < Z < +2) \\ &= P(-2 < Z < 0) + (0 < Z < +2) \\ &= 0,4773 + 0,4773 \\ &= 0,9546\end{aligned}$$

Böylece birimlerin %95,46 sının  $\mp 2\sigma$  arasında yer alacağı söylenebilir.



c)  $P(\mu - 3\sigma < X = \mu + 3\sigma) = P(-3 < Z < +3)$   
 $= P(-3 < Z < 0) + P(0 < Z < +3)$   
 $= 0,4987 + 0,4987$   
 $= 0,9974$

Birimlerin %99,74 ünün  $\mp 3\sigma$  arasında yer alacağı açıktır.



### ÖRNEK 5.44:

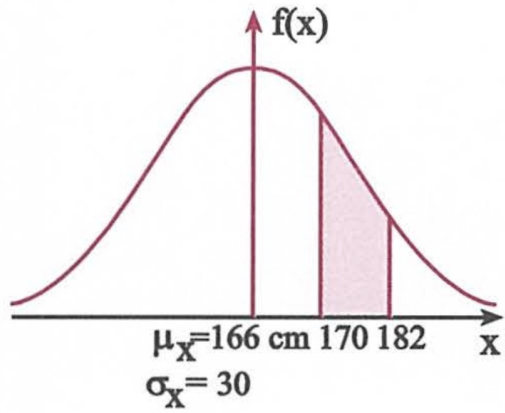
Rastgele seçilen 560 öğrencinin boy uzunlukları 166 cm ortalamalı ve 30 cm standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Rastgele bir öğrenci seçilirse bu öğrencinin boyunun

- a) 170 cm ile 182 cm arasında olma olasılığı nedir?
- b) 175 cm den uzun olma olasılığı nedir?



### ÇÖZÜM 5.44:

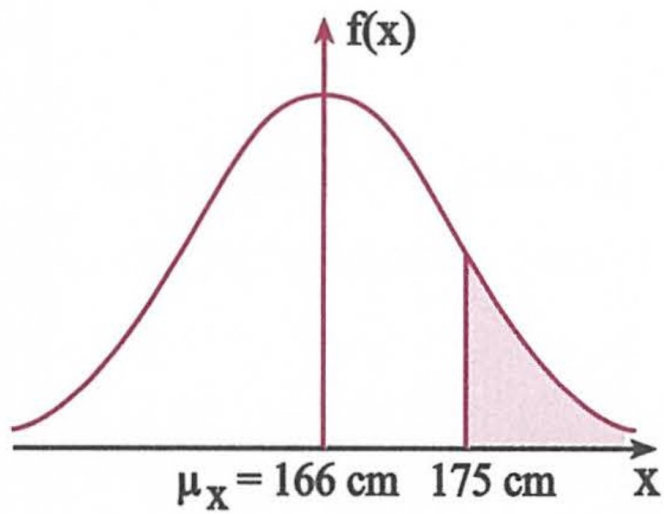
a)



$$\begin{aligned} & P(170 \leq x \leq 182) \\ &= P\left(\frac{170 - 166}{30} \leq Z \leq \frac{182 - 166}{30}\right) \\ &= P(0,13 \leq Z \leq 0,53) \\ &= P(Z \leq 0,53) - P(Z \leq 0,13) \\ &= 0,7019 - 0,5517 \\ &= 0,1502 \end{aligned}$$



b)



$$\begin{aligned} P(X > 175) &= 1 - P(X \leq 175) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{175 - 166}{30}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 0,3), \\ &= 1 - 0,6179 \\ &= 0,3821 \end{aligned}$$

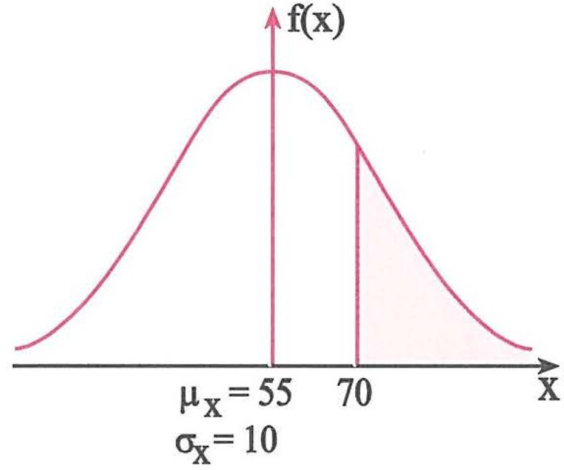
### ÖRNEK 5.45:

Bir sınıftaki öğrencilerin not ortalaması 55 ve standart sapması 10 puandır. Sınıfta rastgele iki öğrenci seçilirse her ikisinin de notunun 70 den yüksek olma olasılığı nedir?



### ÇÖZÜM 5.45:

Bir öğrencinin notunun 70 den yüksek olma olasılığı



$$\begin{aligned} P(X > 70) &= 1 - P\left(Z > \frac{70 - 55}{10}\right) \\ &= 1 - P(z < 1,5) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,5) \\ &= 1 - 0,9332 \\ &= 0,0668 \end{aligned}$$

Her iki öğrencinin de notunun 70 den yüksek olma olasılığı ise  $(0,0668)(0,0668)=0,00446$  olarak elde edilir. Oldukça düşük bir olasılık olarak düşünülebilir.

### ÖRNEK 5.46:

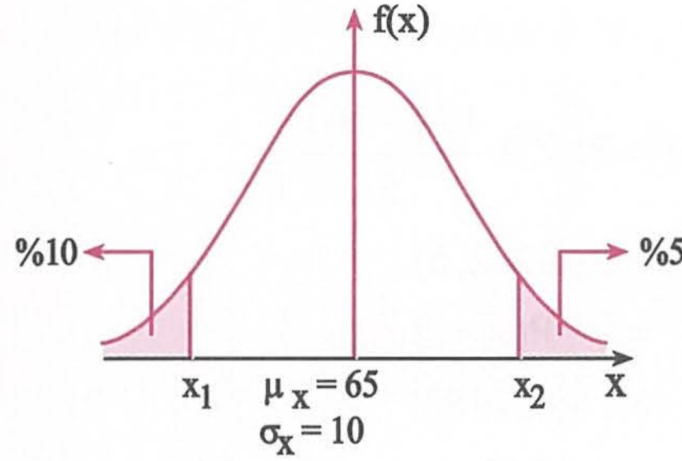
İstatistik dersi notları, ortalaması  $\mu=65$  ve varyansı  $\sigma^2=100$  olan bir normal dağılıma sahiptir. Öğrencilerin %5 i çok başarılıyken %10'u başarısızdır.

- a) Çok başarılıların aldığı en düşük not kaçtır?
- b) Başarısızların aldığı en yüksek not kaçtır?



### ÇÖZÜM 5.46:

a)



$P(X \geq x_2) = 0,05$  olduğuna göre

$P(X < x_2) = 0,95$  dir. Buradan

$P(Z < 1,645) = 0,95$  olarak belirlenir

$$\frac{x_2 - 65}{10} = 1,645 \text{ ise } x_2 = 81,45$$

b)  $P(X \leq x_1) = 0,10$  olduğuna göre

$P(Z \leq -1,28) = 0,10$  olur

$$\frac{x_1 - 65}{10} = -1,28 \text{ ise } x_1 = 52,2 \text{ dir.}$$

### ÖRNEK 5.47:

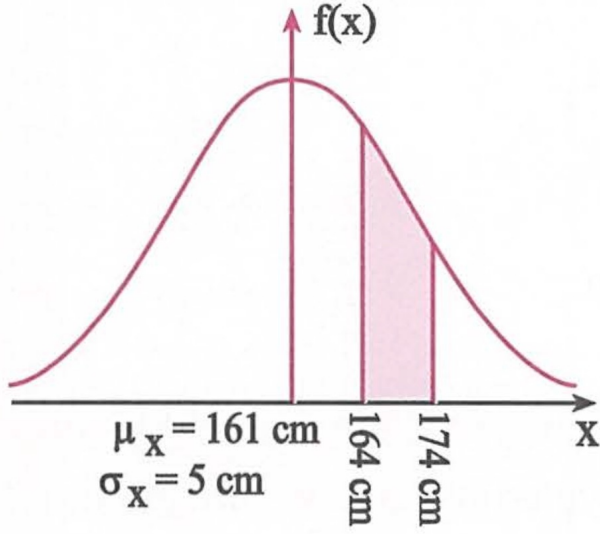
500 öğrencinin boylarınının 161 cm ortalama ve 5 cm standart sapma ile normal dağıldığı varsayılmaktadır.

- a) Boyu 164 cm ile 174 cm arasındaki öğrencilerin ve
- b) Boyu 174 cm'den uzun olan öğrencilerin sayısını bulunuz



## ÇÖZÜM 5.47:

a)

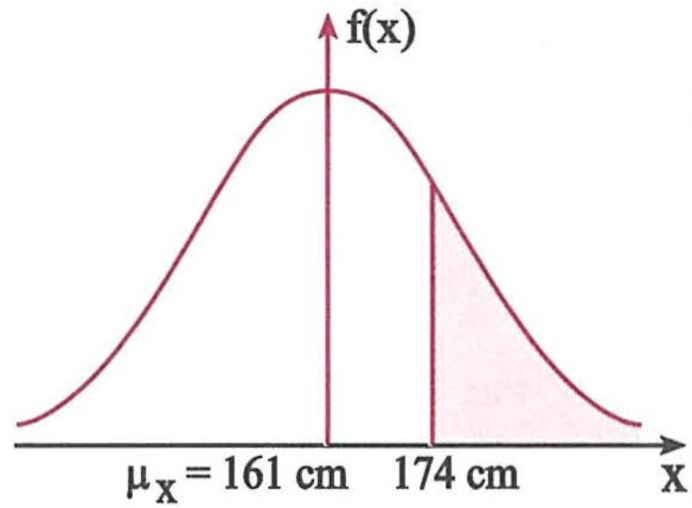


$$\begin{aligned} P(164 \leq X \leq 174) &= P\left(\frac{164-161}{5} \leq Z \leq \frac{174-161}{5}\right) \\ &= P(0,6 \leq Z \leq 2,6) \\ &= P(Z \leq 2,6) - P(Z \leq 0,6) \\ &= 0,9953 - 0,7258 \\ &= 0,2696 \end{aligned}$$

Böylece 164 cm ve 174 cm boyları arasındaki öğrenci sayısı  $500 \times 0,2696 = 134,8 \cong 135$  olarak belirlenir.

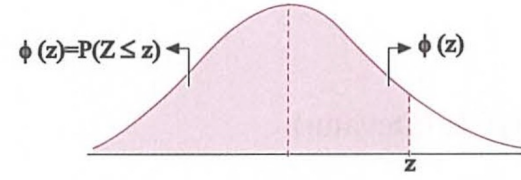


b)



$$\begin{aligned} P(X \geq 174) &= P\left(Z \geq \frac{174 - 161}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2,6) \\ &= 1 - P(Z < 2,6) \\ &= 1 - 0,9953 \\ &= 0,0047 \end{aligned}$$

öğrenci sayısı ise  $500 \times 0,0047 = 2,35 \cong 2$  kişi olarak belirlenir.



**EK 1:** z dağılım tablosu

<i>z</i>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985

-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3482
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
<u>z</u>	<u>Bölge</u>									
-3.50	0.00023263									
-4.00	0.00003167									
-4.50	0.00000340									
-5.00	0.00000029									

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5679	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8840	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
$z$	Bölge									
3.50	0.99976737									
4.00	0.99996833									
4.50	0.99999660									
5.00	0.99999971									